

弯曲时空量子场论概述(上篇)——正则形式体系

第一章 平直时空量子场论回顾

在我们进入任何对弯曲时空量子场论研究之前,我们先回顾一下平直时空的经典与量子场论的基本方法,包括拉格朗日形式,哈密顿形式,诺特定理,正则量子化,和施温格原理等.这些方法在平直时空的量子场论中的应用在绝大多数标准教科书上都非常常见,在这里进行简单回顾,并为后文进行一些符号约定.

1.1 经典拉氏量和哈密顿量

我们从系统的作用量 S 出发,我们定义:

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}[\phi, \partial\phi]$$

在这里,系统的动力学变量是一个场 ϕ 作为时空坐标的函数,作用量作为它的一个泛函,并可以写成拉氏量密度对全时空的积分.那么,最小作用量原理告诉我们,系统经典的运动方程由欧拉-拉格朗日方程得到.

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

其中应该对所有作为独立动力学变量的场分别变分.

系统的正则动量被定义为:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}$$

那么仿照经典的哈密顿力学,我们得到系统的哈密顿量:

$$H[\phi, \pi]_t = \int d^3x \pi \partial_0 \phi - L[\phi, \partial\phi]_t$$

1.2 诺特定理

当系统具有一定对称性时,诺特定理能给出对应的守恒流,诺特定理的证明在绝大多数场论教科书上能够找到.这里我们假设对称变换同时包括了坐标变换和场变量的变换.

首先定义正则能动量张量:

$$\Theta_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu$$

我们不难验证,它是守恒的,即 $\partial_\mu T_\nu^\mu = 0$

我们稍作计算,就能得到诺特定理的守恒流为:

$$0 = \delta S = \int d^4x \partial_\mu J^\mu$$
$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi - \Theta_\nu^\mu \delta x^\nu$$

1.3 正则量子化

对于标量场,我们要把他量子化,相当于把所有动力学变量都变成相应的作用于希尔伯特空间上的算符,并规定等时对易关系:

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{y})$$

在薛定谔绘景下,我们有态矢演化的薛定谔方程:

$$i\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}[\phi, \pi]|\Psi(t)\rangle$$

其中如果我们把它用场算符的本征态展开,就得到了通常的运动方程.

在海森堡绘景下,我们有海森堡方程,对于算符 $F[\phi, \pi, t]$ 有:

$$i\frac{d}{dt}\hat{F} = [\hat{F}, \hat{H}] + i\frac{\partial}{\partial t}\hat{F}$$

1.4 施温格算符作用原理

Schwinger基于诺特定理,对通常的海森堡方程进行了推广,这在通常场论教材不会被提及

在海森堡绘景下,算符的时间演化由哈密顿量决定,写成协变的形式,即(这里假定考虑的算符不显含坐标):

$$i\partial_0 f = [f, P_0]$$

其中 $P_\nu = \int d^4x \Theta_\nu^0$.

好吧,我们仔细地考虑一下,时间演化可以理解成我们对 $t = 0$ 的系统做一个 $t \rightarrow t + \delta t$ 的时间平移变换,而我们的不难发现,这个时间平移变换对应的守恒荷恰好是哈密顿量 H .

因此,我们可以试图把时间演化推广到任意的无穷小变换:

我们考虑变换如下:

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \phi'(x) = \phi(x) + \delta_0 \phi(x)$$

(要注意, δ_0 指的是不加坐标变换的情况下场的改变量),此时我们可以把作用量的变化积出来:

$$\delta S = G(t_2) - G(t_1)$$

$$G(t) = \int d^3x [\pi \delta \phi - T_\nu^0 \delta x^\nu]$$

其中 $\delta_\phi = \phi'(x') - \phi(x)$ 是总的变化量.我们发现,如果变换是对称变换,它对应的自然是守恒荷.

那么,我们最后给出施温格算符作用原理,对于某一个变换,它的算符生成元是 G ,那么这个变换下,任意算符 F 本身(不计坐标变换)的变化量为:

$$i\delta_0 F = [F, G]$$

1.5 单粒子态

对于自由场,我们把单粒子态定义为一个动量本征态.为了帮助进行归一化,我们先定义两个满足运动方程的场变量 f_1, f_2 的KG内积如下:

$$(f_1, f_2) = i \int d^3x f_1^* \overleftrightarrow{\partial}_0 f_2$$

那么对于一个动量本征模式,我们定义它的经典解为:

$$g_{\vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \exp[-ik \cdot x]$$

此时,我们有模式函数在KG内积意义下是归一的.(我们在之后的一般场合,也会要求模式函数要归一化).

在量子化之后,我们要求场算符可以分解成产生和湮灭若干这些模式的算符的组合

$$\phi(x) = \int d^3k \left(a_k g_k(x) + a_k^\dagger g_k^*(x) \right)$$

第二章 弯曲时空量子场论总述

目前最成功的有实验验证的引力理论当然是广义相对论,广义相对论通过微分几何的语言,将时空描述成一个黎曼流形,引力是时空弯曲的几何效应.那么当我们研究弯曲时空的量子场论时,我们试图进行一种准经典的近似,即不去量子化引力场,而只研究在弯曲的时空背景下,量子场的演化.这就是弯曲时空量子场论.我们接下来试图将平直时空的方法扩展到弯曲时空.

另外,弯曲时空量子场论的最主要成就可能是预言了在宇宙膨胀和黑洞附近的粒子产生.这分别对应了宇宙微波背景辐射和霍金辐射与黑洞热力学.而且弯曲时空的量子场论也对关于自旋统计定理,粒子态的定义等问题给出了新的见解.

2.1 弯曲时空的对称性和守恒律

假定读者学过广义相对论.在弯曲时空意义上,“守恒定律”应当表现为一个物理量的协变散度为零.和平直时空相比,弯曲时空的对称性不仅仅是洛伦兹对称性,而是一般的,对坐标重参数化的微分同胚对称性.这对应了广义相对论中一般的非惯性系参考系变换.我们在作用量和诺特流层面,都要着重考虑这种对称性.

广义协变性原理在作用量层面上对应了作用量的微分同胚不变性:

$$S[\phi'(x'), g'_{\mu\nu}(x')] = S[\phi(x), g_{\mu\nu}(x)]$$

我们原则上能写出很多不同的作用量,但有一种最简单的方法:

在闵氏时空的作用量上,所有的坐标导数 ∂_μ 换成协变导数 ∇_μ ,所有的闵氏度规 $\eta^{\mu\nu}$ 换成弯曲时空度规 $g^{\mu\nu}$,而积分测度 $d^n x$ 换成微分同胚不变测度 $d^n x \sqrt{|g|}$.

这种构造作用量的弯曲时空版本的方法叫**极小耦合方案**,它最简单地把平直时空的量子场扩展到了弯曲时空背景,并且不引入别的项.这种方案得到的场的运动方程也几乎是把原本方程的坐标导数换成协变导数这样简单.

拉格朗日方程我们可以和平直时空相同地导出,不过形式要复杂很多,因为它包含了场的很多导数.关于度规张量变分,结果不一定会消失,毕竟如果把度规张量看做一个**动力学场**,根据广义相对论,它会和爱因斯坦方程中的标量曲率进行耦合.而根据广义相对论,对度规张量进行变分,得到的运动方程应该是**爱因斯坦场方程**.

但刚才说的变分非零导致的运动方程,是对度规**任意的变动**.我们接下来考虑的是系统的微分同胚对称性:如果我们加上限制,只考虑一个无穷小坐标微分同胚变换 $x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu(x)$ 导致的度规改变.(这样自由度会从10个缩减到只有4个),那么作用量必须是不变的(而平直时空坐标变换对应能动张量).在这样的微分同胚变换下,我们有:

$$g'(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\sigma}(x)$$

对应的度规张量变化:

$$\bar{\delta} g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x)$$

经过一点计算(代入协变导数的定义),或者根据微分几何的知识(和度规适配的导数算符必然导致),它等于对度规的李导数:

$$\bar{\delta} g_{\mu\nu}(x) = \mathcal{L}_\epsilon g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu$$

接下来,我们把它扔进诺特定理,得到对应的守恒流就应该是广义的能动量张量:

$$\delta S = \int d^n x \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \delta_0 g_{\mu\nu} = - \int d^n x \sqrt{g} T^{\mu\nu} \nabla_\mu \epsilon_\nu = 0$$

其中:

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}$$

根据协变导数的莱布尼茨律,分部积分得到:

$$\int d^n x \epsilon_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu}$$

由于平移的任意性,即得到了广义的能动量守恒:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

我们同时不难得到它的协变版本:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$$

此后,我们考虑弯曲时空版本的施温格算符作用原理(即守恒荷对应的算符对应其对称变换).如果在无穷小变换下,度规本身的变化量为0,即

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x)$$

,对称变换不涉及度规的改变(即保持时空性质).

这种情况下,因为对度规的变分在这些变换下自动为0,我们的一切推导都相同,可以相仿地得到作用原理.

$$G(t) = \int d^{n-1} x [\pi \delta \phi - \Theta_\nu^0 \delta x^\nu]$$

$$i \delta_0 F = [F, G]$$

那么我们同样最简单地,等价地得到正则对易关系:

$$[\phi(x), \pi(y)] = i \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

除此以外,我们还可以分析诺特定理,即对称变换不改变作用量的情形,我们分开来看,如果对称变换是系统内禀自由度变换,不涉及时空,即 $\delta x^\mu = 0, \delta \phi \neq 0$,我们有诺特流:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi, \partial_\mu J^\mu = 0$$

但在弯曲时空中,一个"守恒律"应当对应协变散度为零,鉴于流 J^μ 是矢量密度量纲的,我们不难发现有:

$$\nabla_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{g}} J^\mu \right) = 0$$

即真正的守恒流是诺特流除以一个度规的行列式因子.因此,我们可以理解为,在弯曲时空中,诸如电荷的内部对称性对应的守恒流已然守恒,其形式要在平直时空的诺特流基础上除以代表**时空体积元**的度规行列式因子.

另外,对于时空自己的对称性,这对应着我们的Killing矢量 ξ ,此时有:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$$

代入到前面的计算,有守恒流:

$$\nabla_\mu(T^{\mu\nu}\xi_\nu)$$

2.2 弯曲时空的标量场

我们首先写下系统的作用量应当如下:

正则量子化的核心是建立希尔伯特空间和里面的**等时对易关系**,那么问题来了,在弯曲时空中,我们没办法定义一个统一的"时间".这也是弯曲时空量子场论的核心问题之一,即量子场定义的**不唯一性**.

一个比较通用的做法是,将整个时空进行切片成一簇互不相交类空超曲面,而时间被定义为**描述类空曲面簇的参数**.等时对易关系应当为在同一个 t 对应的类空曲面上,我们有:

$$[\phi(x, t), \pi(y, t)] = i\delta(x - y)$$

在这之后,我们可以仿照平直时空的方法进行正则量子化了.

那么下一步,我们想要把场算符按照单粒子态进行模式展开,它的先决条件是要找到**一些始终正交归一的单粒子模式**我们需要考虑模式之间的KG内积,分析它在弯曲时空的守恒性:

我们定义弯曲时空的KG内积如下:

$$(f_1, f_2) = i \int d\sigma \sqrt{-g} n^\nu (f_1^* \partial_\nu f_2 + f_2 \partial_\nu f_1^*)$$

其中 $d\sigma$ 为对一个类空超曲面的积分.而很显然,如果类空超曲面的边界在无穷远,这个内积的值一般来说和超曲面本身无关:

$$\begin{aligned} \Delta f &= i \int_v d^n x \partial^\mu (\sqrt{g} f_1^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu f_2) \\ &= i \int_v d^n x \sqrt{g} \nabla^\mu (f_1^* \overleftrightarrow{\nabla}_\mu f_2) = 0 \end{aligned}$$

其中第二个等号来自场方程

另外不难发现,这个内积当取纯空间部分时是守恒的

$$\begin{aligned} \partial_t (f_1, f_2) &= i \int d^{n-1} x \partial_0 [\sqrt{-g} g^{0\nu} f_1^* \overleftrightarrow{\partial}_0 f_2] \\ &= i \int d^{n-1} x \sqrt{g} \nabla_\mu (g^{\mu\nu} f_1^* \overleftrightarrow{\partial}_0 f_2) - i \int d^{n-1} x \partial_i (\dots) = 0 \end{aligned}$$

第一项因为场方程为0,第二项因为高斯定理为0.

也就是说,在这样的KG内积意义下正交归一的模式函数,其性质会保持,因此我们得以定义一套完备的模式进行展开.

2.3 粒子的定义与Bogolyubov变换

我们在前文中有提及,因为我们进行量子化时总需要选择一组切片,按照这组切片对应的模式函数得到相应的产生湮灭算符.而**真空态**作为所有湮灭算符的零本征态,它的定义是和产生湮灭算符的选取密切相关的.因此,在弯曲时空的量子场论中,**粒子态和真空的定义**都是不唯一的,而我们可以通过一组变换将其联系起来.

因为粒子和模式展开都是对量子场 ϕ 的一种描述,因此场本身是不变的.我们考虑两组不同的模式和算符:

$$\phi(x) = \sum_k (a_k u_k(x) + a_k^\dagger u_k^*(x)) = \sum_k (b_k v_k(x) + b_k^\dagger v_k^*(x))$$

我们一般默认模式都是完备的(比如最简单的平面波显然是完备的),那么必然存在关系:

$$v_j = \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*)$$

$$v_j^* = \sum_i (\alpha_{ji}^* u_i^* + \beta_{ji}^* u_i)$$

(其中下标 ij 代表遍历所有模式,可能是求和或者积分)

代入上面的式子,我们得到关系:

$$a_i = \alpha_{ji} b_j + \beta_{ji}^* b_j^\dagger$$

$$a_i^\dagger = \beta_{ji} b_j + \alpha_{ji}^* b_j^\dagger$$

另外,为了保证系统变换前后模式内积的正交归一性,应当有性质:

$$\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^* = \delta_{ij}$$

$$\alpha_{ik} \beta_{jk}^* - \beta_{ik} \alpha_{jk}^* = 0$$

因此,我们有两个真空, a 真空和 b 真空,分别对应各自湮灭算符的0本征态.

我们用 $|\rangle_a$ 来表示 a 真空,同理 b

那么,我们考虑在 b 真空中,找到各 n 个动量为 $\pm \vec{k}$ 的 a 定义的粒子的概率幅可以写作:

$$\langle_a n, n | 0 \rangle_b = \frac{1}{n!} \langle_a 0 | (a_{-k})^n (a_k)^n | 0 \rangle_b$$

根据关系:

$$a_k | 0 \rangle_b = \alpha_{jk} b_j + \beta_{jk}^* b_j^\dagger | 0 \rangle_b = \beta_{jk}^* b_j^\dagger | 0 \rangle_b$$

$$a_{-k}^\dagger | 0 \rangle_b = \beta_{j,-k} b_j + \alpha_{j,-k}^* b_j^\dagger | 0 \rangle_b = \alpha_{j,-k}^* b_j^\dagger | 0 \rangle_b$$

得到

$$\frac{1}{n!} \langle_a 0 | (a_{-k})^n (a_k)^n | 0 \rangle_b = \frac{1}{n!} \left(\frac{\beta_k^*}{\alpha_k^*} \right)^n \langle_a 0 | (a_{-k})^n (a_{-k}^\dagger)^n | 0 \rangle_b = \left(\frac{\beta_k^*}{\alpha_k^*} \right)^n \langle_a 0 | 0 \rangle_b$$

那么我们只需要找到两个真空态的内积,就能确定出具体的概率幅大小了..

根据完备性,我们可以插一组基,为了满足归一化条件:

$$1 = \sum_{n_j(k_j)} |\langle_a n_j(k_j) | 0 \rangle_b|^2 = \left(\sum_j \prod |\beta_{k_j} / \alpha_{k_j}|^{2n_j} \right) |\langle_a 0 | 0 \rangle_b|^2$$

交换次序:

$$\begin{aligned} 1 &= |\langle_a 0 | 0 \rangle_b|^2 \prod_j \sum_{n_j=0}^{\infty} |\beta_{k_j} / \alpha_{k_j}|^{2n_j} \\ &= |\langle_a 0 | 0 \rangle_b|^2 \prod_j \frac{1}{1 - |\beta_{k_j} / \alpha_{k_j}|^2} \\ &= |\langle_a 0 | 0 \rangle_b|^2 \prod |\alpha_{k_j}|^2 \end{aligned}$$

那么我们就得到概率为:

$$P_n = \left| \frac{\beta_k}{\alpha_k} \right|^{2n} |\alpha_k|^{-2}$$

我们不难验证,这个概率单调减小,而且和为1

总的产率期望为

$$\langle N_k \rangle = \sum_0^{\infty} n P_n = \sum_i |\beta_{ik}|^2$$

当然,实际上当然要对所有的 \vec{k} 求积分,而可能带来的发散行为来自全空间的体积因子.

总而言之,对于两组不同的模式函数及其定义的粒子态,如果二者存在**非零的混合系数** β ,那么一组模式的真空对于另一组模式而言不是真空,而且存在非零的粒子数期望.它们之间通过这一变换相联系.

弯曲时空下的粒子产生就是因为**粒子和真空态的定义**发生改变,从而产生非零的混合系数,因此计算这一系数是处理弯曲时空**自由量子场**中粒子产生的关键.

*2.4 Weyl对称性(在广义相对论资料被称作共形对称性)

关于这种对称性的命名,场论和引力理论的习惯存在非常大的分歧,本文将以场论人的习惯为准

详情可以参考:

广义相对论中的共形变换和量子场论中的共形变换是否有区别? - 王俊凯的回答 - 知乎

<https://www.zhihu.com/question/433980313/answer/3465967230>

简而言之,在共形场论中,因为通常的场论**不要求广义协变性**,所以场论中的共形变换指的是**特殊的微分同胚变换**(在引力理论中,被称为共形等距变换),使得

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x)$$

这种微分同胚对称性在引力理论是平凡的,但在场论是不平凡的.

而与此同时,**Weyl对称性**是系统尺度下的不变性,不涉及到坐标变换,只涉及度规本身的局域伸缩:

$$g'_{\mu\nu}(x) = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}(x)$$

不过对于一个标量场,作为标量,它总有:

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

因此,在我们考虑的**Weyl变换**下,一个场的行为可以和共形场论里面的初级场(primary)类似.这种Weyl对称性在引力理论和场论**都是不平凡的**,所以它是系统一种额外的对称性.不过非常巧合的是,它在引力理论里面被称作是**共形对称性**,这导致了很大的误区.

在这之后,我们考虑Weyl对称性的守恒流.考虑无穷小变换

$$\delta_0 g_{\mu\nu}(x) = \lambda(x) g_{\mu\nu}(x), \delta_0 \phi(x) = p \lambda(x) \phi(x)$$

作为"对称性",这种变换下系统的作用量变化为零:

$$0 = \delta S = \int d^n x \frac{\delta S}{\delta \phi} \delta_0 \phi + \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \delta_0 g_{\mu\nu}$$

如果动力学场 ϕ **满足运动方程**,那么经典地,结果就是简单的能动量张量无迹条件:

$$T^\mu_\mu = 0$$

(值得一提的是,这一条件因为前提是经典的运动方程成立,所以在量子层面上,它会被Weyl反常破坏)

那么为了构造Weyl不变的作用量,我们有必要检查通常作用量的各种量在Weyl变换下是如何改变的.考虑弯曲时空的各种变量,不难发现:

$$\begin{aligned}\sqrt{-\tilde{g}} &= (1 + 2\lambda)\sqrt{-g}, \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = (1 - \lambda)g^{\mu\nu} \\ \Gamma_{\nu\tau}^{\mu} &= \Gamma_{\nu\tau}^{\mu} + \frac{1}{2}(\delta_{\tau}^{\mu}\partial_{\nu}\lambda + \delta_{\nu}^{\mu}\partial_{\tau}\lambda - g^{\mu\sigma}g_{\nu\tau}\partial_{\sigma}\lambda) \\ \tilde{R} &= (1 - \lambda)R + 3\Box\lambda\end{aligned}$$

我们发现,如果拉氏量的参数满足 $\xi = \frac{1}{6}$, $m = 0$, $p = -\frac{1}{2}$ 时,拉氏量是共形不变的:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} &= \frac{1}{2}\sqrt{-\tilde{g}}\left(\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_{\mu}\tilde{\phi}\partial_{\nu}\tilde{\phi} - \frac{1}{6}\tilde{R}\tilde{\phi}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 + 2\lambda)\sqrt{-g}\left\{(1 - \lambda)g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right)\phi\right]\partial_{\nu}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right)\phi\right] - \frac{1}{6}[(1 - \lambda)R + 3\Box\lambda](1 - \lambda)\phi^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left[g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - g^{\mu\nu}\phi\partial_{\mu}\lambda\partial_{\nu}\phi - \frac{1}{6}R\phi^2 - \frac{1}{2}\phi^2\Box\lambda\right] \\ &= \mathcal{L} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\phi\partial_{\mu}\lambda\partial_{\nu}\phi - \frac{1}{4}\sqrt{-g}\phi^2\Box\lambda \\ &= \mathcal{L} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\phi\partial_{\mu}\lambda\partial_{\nu}\phi - \frac{1}{4}\sqrt{-g}\phi^2\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\lambda) \\ &= \mathcal{L} - \partial_{\mu}\left(\frac{1}{4}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\phi^2\partial_{\nu}\lambda\right)\end{aligned}$$

我们同样可以用 $\lambda(x)$ 的指数映射生成有限大共形变换.细致的分析得出,在 n 维时空中共形不变的条件是

$$p = \frac{2 - n}{2}, \quad \xi = \frac{n - 2}{4(n - 1)}, \quad m = 0$$

第三章 几种特殊情形的自由量子场

在本章中,主要通过对弯曲时空量子场不同的真空进行适当**定义**,和**求解模函数**,通过Bogolyubov变换求解其混合系数,从而获得弯曲时空下粒子生成的细节.其主要思想和方法是一致的.其中核心在于**定义适当的真空态**,以及求解其混合系数.

另外,对于二维时空,我们可以证明它永远是共形平直的(可以通过一个Weyl变换变成平直的),因此对于二维极小耦合的标量场,它本身具有Weyl对称性,我们可以很方便地通过一组坐标变换来求解其模函数.

3.1 渐进平直时空与宇宙膨胀

如果时空在过去无穷远和未来无穷远是平直的,那么它的真空态就非常好定义,我们可以直接定义这两个渐进的真空,并且因为时空渐进平直,它们的模函数的渐进行为也是**平面波**,这会让解的形式非常简单.

由于时空渐进平直,我们可以通过解的渐进行为来分别给出不同的模函数.

我们考虑一个二维的,并且极度简化了的宇宙模型:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 = C^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2)$$

其中为了方便计算,定义辅助变量为

$$t = \int^{\eta} C(\eta')d\eta', \quad C^2 = a^2$$

因为我们考虑的是弯曲时空背景下量子场的演化,所以时空本身演化及其演化的机制我们不关心,我们可以随意地给出一种渐进平直的演化方式:

$$C^2(\eta) = A + B \tanh(\rho\eta)$$

很显然,在 $\eta \rightarrow \pm\infty$ 时,时空渐进地趋于 $A \pm B$

在这两个渐进的闵可夫斯基区域,我们可以定义相应的模函数和真空 u^{in}, u^{out} .那么我们需要求解各自的模函数的运动方程为:

$$\square\phi(x) = 0$$

代入度规得到:

$$a^{-1}\partial_t(a\partial_t\phi) - a^{-2}\partial_t^2\phi = 0$$

我们将解进行分离变量,即只考虑 x 方向的平面波,那么有:

$$u_k(\eta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \chi_k(\eta)$$

代入得到它们的运动方程:

$$\frac{d^2\chi_k}{d\eta^2} + [k^2 + C^2(\eta)m^2]\chi_k(\eta) = 0$$

作为一个二阶方程,它的通解应当有两个自由参数,此时我们应当适当调整这两个参数,来**保证其渐进行为**分别在过去/将来无穷远是正规平面波.

这个方程的解是一个超几何函数:

$$u^{in} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{in}}} \exp\left(ikx - i\omega_+\eta - i\frac{\omega_-}{\rho} \ln[2 \cosh \rho\eta]\right) \times F\left(1 + i\frac{\omega_-}{\rho}, i\frac{\omega_-}{\rho}, 1 - i\frac{\omega_{in}}{\rho}, \frac{1 + \tanh \rho\eta}{2}\right)$$

$$u^{out} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{out}}} \exp\left(ikx - i\omega_+\eta - i\frac{\omega_-}{\rho} \ln[2 \cosh \rho\eta]\right) \times F\left(1 + i\frac{\omega_-}{\rho}, i\frac{\omega_-}{\rho}, 1 + i\frac{\omega_{out}}{\rho}, \frac{1 - \tanh \rho\eta}{2}\right)$$

$$\omega_{in} = \sqrt{k^2 + m^2(A - B)}$$

$$\omega_{out} = \sqrt{k^2 + m^2(A + B)}$$

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2}(\omega_{out} \pm \omega_{in})$$

通过超几何函数的性质,我们做内积就能得到Bogolyubov混合系数:

$$u_k^{in}(\eta, x) = \alpha_k u_k^{out}(\eta, x) + \beta_k u_{-k}^{out*}(\eta, x),$$

$$\alpha_k = \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(1 - i\frac{\omega_{in}}{\rho})\Gamma(-i\frac{\omega_{out}}{\rho})}{\Gamma(-i\frac{\omega_{+}}{\rho})\Gamma(1 - i\frac{\omega_{+}}{\rho})},$$

$$\beta_k = \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(1 - i\frac{\omega_{in}}{\rho})\Gamma(i\frac{\omega_{out}}{\rho})}{\Gamma(i\frac{\omega_{-}}{\rho})\Gamma(1 + i\frac{\omega_{-}}{\rho})},$$

$$|\alpha_k|^2 = \frac{\sinh^2\left(\pi\frac{\omega_{+}}{\rho}\right)}{\sinh\left(\pi\frac{\omega_{in}}{\rho}\right)\sinh\left(\pi\frac{\omega_{out}}{\rho}\right)}$$

$$|\beta_k|^2 = \frac{\sinh\left(\pi\frac{\omega_{-}}{\rho}\right)}{\sinh\left(\pi\frac{\omega_{in}}{\rho}\right)\sinh\left(\pi\frac{\omega_{out}}{\rho}\right)}.$$

3.2 渐进德西特时空的量子场

3.3 二维Weyl不变场与盗鲁效应

盗鲁效应(Unruh Effect) 说的是加速运动的观测者会感受到身边存在一股谱和某一温度的黑体辐射相当的粒子,这是最简单的弯曲时空量子场论效应之一.

我们考虑一个匀加速运动的观测者,它处于Rindler时空之中,它的真空和闵氏真空不同,量子效应使得观测者会感受到某个温度的热浴

简单的运动学告诉我们,在静止参考系下,观测者的坐标为:

$$x = \frac{1}{a} \cosh a\tau, \quad t = \frac{1}{a} \sinh a\tau$$

闵氏时空中,有一个观测者从无穷远处而来,在 $t = 0$ 时到达 $x = \frac{1}{a}$ 并瞬时静止,此后开始逐渐加速直至跑到正方向的无穷远.

为了描述加速运动观测者的时空,首先加速观测者自己应该在这一时空空间静止,而且空间原点处,时间坐标应该恰好等于加速观测者的固有时.最后,我们希望时空是共形平坦的,以方便我们正则量子化.

即:

$$ds^2 = \Omega(\xi^0, \xi^1)((d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2)$$

如果换到光锥坐标,即

$$\tilde{u} = \xi^0 - \xi^1, \quad \tilde{v} = \xi^0 + \xi^1$$

那么在观测者的世界线上 $\xi^0 = \tau, \quad \xi^1 = 0$

且世界线长

$$ds^2 = d\tau^2 = dudv = \Omega^2 d\tilde{u}d\tilde{v}$$

为了方便,不妨令 \tilde{u} 和 \tilde{v} 各自只和 u, v 有关,那么有方程:

$$\frac{du}{d\tau} = e^{-a\tau} = \frac{du}{d\tilde{u}} \frac{d\tilde{u}}{d\tau} = \frac{du}{d\tilde{u}}$$

解出

$$u = C_1 e^{-a\tilde{u}}$$

同理得到:

$$v = C_2 e^{a\tilde{v}}$$

且应该满足固有时相等的条件 $a^2 C_1 C_2 = -1$

不妨取

$$C_1 = -1/a = -C_2$$

即

$$u = -\frac{1}{a} e^{-a\tilde{u}}, \quad v = \frac{1}{a} e^{a\tilde{v}}$$

$$ds^2 = e^{a(\tilde{v}-\tilde{u})} d\tilde{u}d\tilde{v}$$

从光锥坐标换回去:

$$t = \frac{1}{a} e^{a\xi^1} \sinh a\xi^0, \quad x = \frac{1}{a} e^{a\xi^1} \cosh a\xi^0$$

$$ds^2 = e^{2\alpha\xi^1} [(d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2]$$

这就得到了满足要求的时空坐标, 我们称之为 *Rindler* 时空, 它局地等价于闵氏时空且**没有曲率**, 它就能用来描述加速观测者参考系下的时空性质(我相信在广相课各位学过)

但不幸的是, *Rindler* 时空是不完备的, 在加速参考系中, 观测者在它加速的反方向至多只能测量到 $\frac{1}{a}$ 的空间长度, 因为当 $d\xi^0 = -$ 时, 显然有 $L = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha\xi^1} d\xi^1 = \frac{1}{a}$

这也可以从时空图上去理解, 因为在地面系上看, 距离较远的点发出的光永远也不会追上这个观测者. 因此也可以发现, *Rindler* 时空只覆盖了光锥内 $\frac{1}{4}$ 的 Minkovski 时空.

接下来进行正则量子化, 因为这是**二维无质量和时空不耦合的标量场**, 具有 **Weyl 对称性**, 因此如果度规共形平坦, 在一个 Weyl 变换的意义下其运动方程和**平坦时空的运动方程相同**. 这样, 在 *Rindler* 时空下, 系统的模式函数同样和平直时空类似, 是坐标的三角函数的最简单形式.

因此我们进行模式展开和正则量子化(二维)如下:

$$\bar{\phi} = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2|k|}} [e^{-i\omega t + ik \cdot x} a_k + e^{i\omega t - ik \cdot x} a_k^\dagger]$$

可以将它分解为 $k > 0$ 和 $k < 0$ 的部分:

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}2\omega} [e^{-i\omega u} a_\omega + e^{i\omega u} a_\omega^\dagger] + u \leftrightarrow v \\ &= \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi}2\Omega} [e^{-i\Omega\tilde{u}} b_\Omega + e^{i\Omega\tilde{u}} b_\Omega^\dagger] + \tilde{u} \leftrightarrow \tilde{v} \end{aligned}$$

其中 a 为 Minkowski 时空的湮灭算符, b 为 *Rindler* 时空的湮灭算符

因此分别定义真空态, 分别为

$$a_\omega |0_M\rangle = 0, \quad b_\Omega |0_R\rangle = 0$$

(实际上 *Rindler* 真空是个非物理的态, 因为它在视界 $u = 0$ 与 $v = 0$ 上是奇异的)

Unruh 效应指的就是说, 探测器因为在加速参考系, 它探测到的是 *Rindler* 粒子, 而 *Rindler* 粒子数算符在 Minkowski 真空存在非零期望值.

我们进行 Bogolyubov 变换如下:

$$b_\Omega = \int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega\omega} a_\omega + \beta_{\Omega\omega}^* a_\omega^\dagger)$$

而稍微算算得到:

$$\langle 0_M | b_\Omega^\dagger b_\Omega | 0_M \rangle = \int d\omega |\beta_{\omega\Omega}|^2$$

求解 β 系数的过程可以直接通过场算符的定义式得到:

(或者换言之, 这个过程是在求两个波的 K-G 内积)

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{-i\omega u} = \int_0^\infty \frac{d\Omega'}{\sqrt{\Omega'}} (\alpha_{\Omega'\omega} e^{-i\Omega'\tilde{u}} + \beta_{\Omega'\omega} e^{i\Omega'\tilde{u}})$$

两边同时乘 $e^{\pm i\Omega\tilde{u}}$, 对 \tilde{u} 积分就能滤出系数:

$$\begin{aligned}
\beta &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u - i\Omega \tilde{u}} d\tilde{u} \\
&= -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_{-\infty}^0 (-au)^{-i\Omega/a-1} e^{-i\omega u} du \\
&= -\frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} e^{\pi\Omega/2a} e^{\frac{i\Omega}{a} \ln \frac{\omega}{a}} \Gamma\left(-\frac{i\Omega}{a}\right)
\end{aligned}$$

同理有:

$$\alpha = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} e^{\frac{\pi\Omega}{2a}} e^{\frac{i\Omega}{a} \ln \frac{\omega}{a}} \Gamma\left(-\frac{i\Omega}{a}\right)$$

$$\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} = e^{\frac{2\pi\Omega}{a}}$$

最后我们积分就能得到其期望粒子数(同时我们可以利用性质)

$$\int_0^{\infty} (|\alpha_{\Omega\omega}|^2 - |\beta_{\Omega\omega}|^2) d\omega = \delta(0)$$

$$\delta(0) = \int_0^{\infty} d\omega |\beta|^2 (e^{\frac{2\pi\Omega}{a}} - 1)$$

最后我们得到:

$$\langle N_{\Omega} \rangle = \frac{\delta(0)}{e^{\frac{2\pi\Omega}{a}} - 1}$$

而这个 $\delta(0)$ 项可以被吸收进全空间体积因子,因此我们最后发现:
探测器感受到的粒子数密度分布恰好为一个黑体辐射谱,其等效温度为:

$$T = \frac{a}{2\pi}$$

这就是著名的霍金效应

3.4 纯径向霍金辐射

霍金辐射指的是黑洞会自发地辐射出一些粒子,从而逐渐损失其能量,这也是一种典型的弯曲时空量子场论效应. 我们只考虑最简单的史瓦西黑洞如下:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

为化简接下来计算,我们可以先考虑只有径向的情形(这对应了粒子分波球谐展开时的00分波)

注意 此时我们考虑的是四维时空里面黑洞的时间 和 径向 两个维度的部分 而不是二维时空的黑洞

我们同样可以通过一些技巧,得到两套不同的模函数,进行Bogolyubov变换,从而计算出其系数.

我们定义所谓的乌龟坐标

$$dr^* = \frac{dr}{1 - r_g/r}, \quad r^* = r - r_g + r_g \ln\left(\frac{r}{r_g} - 1\right)$$

在此坐标下,时空是共形平坦的:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dt^2 - dr^{*2})$$

但与此同时,我们发现黑洞视界处的时空具有坐标奇异性,显然它可以通过坐标变换来消除,这就是克鲁斯卡时空坐标:先定义乌龟光锥坐标:

$$\tilde{u} = t - r^*, \tilde{v} = t + r^*$$

不很显然,乌龟光锥坐标就是它的类光测地线(这一操作也叫超前变换和推迟变换,这里按下不表)

那么我们在等 v 先上看 u 的变化:

代入方程有:

$$\frac{du}{d\lambda} = 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E$$

又因为 $dr/d\lambda = -E$

稍微算算我们就能得到

$$u(\lambda) = 2E\lambda - 4M \ln(\lambda/K_1)$$

并定义克鲁斯卡光锥坐标:

$$u = -2r_g e^{-\frac{\tilde{u}}{2r_g}}, v = 2r_g e^{\frac{\tilde{v}}{2r_g}}$$

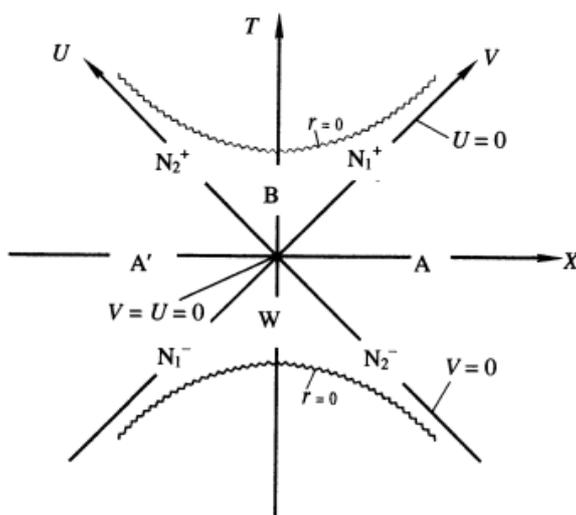
不难验证:

$$ds^2 = \frac{r_g}{r(u,v)} e^{1-\frac{r}{r_g}} dudv$$

如果按照 uv 的定义,克鲁斯卡时空坐标只能覆盖 $r > r_g$ 的区域,但度规显然可以通过加个负号的方式延拓到适合整个时空

我们可以画出时空图,并定义克鲁斯卡时空的时间和空间坐标

$$u = T + R, v = T - R$$



(a) A 和 A' 代表两个无因果联系的渐近平直区. B 为黑洞区, W 为白洞区.

N_1^+ 和 N_2^+ 是黑洞的事件视界. 锯齿状曲线代表奇性所在处(不属于时空)

(我们可以通过共形变换把无穷远点放到图中,并且因为共形,类光测地线还是45°)

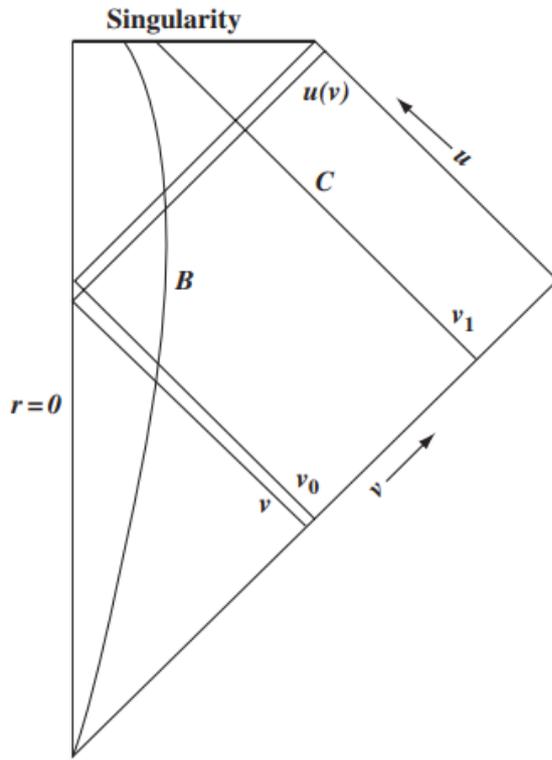


Fig 4.1. The Penrose conformal diagram for collapse in Schwarzschild.

(坍缩星体的彭罗斯图,在某个时间后变成了黑洞,因而在 $r < 2M$ 区域是奇异的)

那么我们最终得到了两种时空坐标,乌龟坐标和克鲁斯卡坐标:

按照乌龟坐标模式展开,我们就能得到沿着类光测地线坐标的正则量子化:

$$\hat{\phi} = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi 2\Omega}} [e^{-i\Omega\tilde{u}} b_\Omega + e^{i\Omega\tilde{u}} b_\Omega^\dagger] + \tilde{u} \leftrightarrow v$$

这组湮灭算符的真空态我们叫做Boulware真空,因为如果从无穷远处观测者的视角来看,这个真空渐进地等价于闵可夫斯基真空,即不存在任何Boulware粒子.但问题在于在黑洞附近的坐标奇异性让这一真空在视界上是非物理的,因此这套坐标下能动量张量会发散,相应的量子涨落的效应会产生很大影响,破坏背景的经典时空*

之后,再使用克鲁斯卡时空坐标,它在视界上不奇异

$$ds^2 = dudv = dT^2 - dR^2$$

$$\hat{\phi} = \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi 2\omega}} [e^{-i\omega u} a_\omega + e^{i\omega u} a_\omega^\dagger] + u \leftrightarrow v$$

而在这套坐标下,视界上一切都是正常的,我们把这个真空态叫做克鲁斯卡真空.我们可以认为这是物理上描述黑洞周围性质的真空.

我们回顾一下,惊讶地发现这套操作和之前导出Unruh效应时相同

其中加速度 a 和表面曲率 $\frac{1}{2r_g}$ 正好对应

因此直接就能应用刚才的结论得到黑洞的谱是黑体辐射谱, 温度为 $T = \frac{1}{8\pi M}$

但这个计算是如何提供“热辐射”这套结果的呢?

我们发现Kruskal真空态同时拥有入射和出射的粒子,它们的谱是相同的.只有这样这个真空态在过去视界 $v = 0$ 上才是非奇异的.所以,为了让这个黑洞在量子场论的层面上是稳定的,它必须接收一些入射粒子,同时辐射那些出射粒子达成热

平衡.但问题来了!实际的黑洞是由星体的探索形成的,因此不存在过去视界 $v = 0$.在这种情况下,黑洞显然是会辐射出粒子,从而是不稳定的.

3.5 一般模函数的绝热近似求解

如果时空没有渐进平直性质,而且没有Weyl对称性,那么它模函数的决定就会非常难以求解,此时一种有效的计算方法就是利用绝热近似(WKB近似).

比如我们回到3.1中的方程,如果 $\xi_k(\eta)$ 满足的方程是一般的:

$$\frac{d^2\chi}{d\eta^2} + \omega^2(\eta)\chi = 0, \omega_k^2(\eta) = k^2 + m^2 C^2$$

那么我们可以用绝热近似进行计算,设其形式为:

$$\chi_k(\eta) = [2W_k(\eta)]^{-1/2} \exp \left[-i \int^\eta W_k(\eta') d\eta' \right]$$

我们可以得到 W 的运动方程:

$$W^2 = \omega^2(\eta) - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{W}}{W} - \frac{3\dot{W}^2}{2W^2} \right)$$

如果时空的变化比较缓慢,那么绝热近似成立,我们可以迭代地近似求解这个非线性运动方程.零级结果为:

$$W^0(\eta) = \omega_k(\eta)$$

一级近似方程为:

$$(W^1(\eta))^2 = \omega^2(\eta) - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega} - \frac{3\dot{\omega}^2}{2\omega^2} \right)$$

这样反复进行迭代即可得到结果.

因此,我们可以通过一组绝热近似的模来定义场方程的模式解,如果绝热级数为 n 阶,那么定义:

$$u(\eta) = \alpha(\eta)u^n(\eta) + \beta(\eta)u^{n*}(\eta)$$

此时,如果精确到 n 阶下, α 和 β 是常数,但在更高阶,那么它会有微小的缓慢变化.

如果我们绝热近似函数性质比较好,我们肯定能找到一个"初始时刻",此时有 $\alpha = 1, \beta = 0$,而在它周围,这两个系数在绝热演化下会有微小而缓慢的变化.我们把刚刚的模式定义为" n 级绝热真空".这样我们也可以动态地研究绝热演化下系统的粒子产生.

第四章及以后

后面几张将主要介绍路径积分形式表述的弯曲时空量子场论,主要围绕其能动量张量和有效作用量的微扰计算与重整化,从而导出各种性质.因为篇幅所限,这部分内容将在下一个另外的文档中被介绍.