

共形场论讲义

2300011496@stu.pku.edu.cn

2024 年 10 月 18 日

摘要

这是一个关于 $D \geq 3$ 共形场论的简要讲义, 主要来自于笔者于 2024.10.17 晚上的讲授内容. 主要目的是为没有接触过太多高维共形场论的读者提供一个快速入门资料, 并快速上手用于和量子场论相关的研究中. 因此一些内容如二维共形场论, 共形自举和一些数学化的证明会被略去.

目录

1 引言和前置	2
1.1 背景和动机	2
1.2 一点公理化量子场论	2
2 共形对称性	4
2.1 基本的共形不变性	4
2.2 共形群的结构	5
2.3 共形群的表示	6
2.4 共形 Ward 恒等式	7
2.5 两点函数	8
3 径向量子化	8
3.1 量子态的引入	8
3.2 局域算符和量子态	9
3.3 算符-态对应	10
3.4 么正边界	11
3.5 OPE 性质证明	11
4 算符积展开	11
4.1 共形不变性的限制	11
4.2 共形块	12
4.3 共形块的解析计算	12
4.4 数值共形自举	12
5 关联函数技术	13
5.1 嵌入形式 (Embedding Formalism)	13
5.2 基本标量算符	15
5.3 基本向量算符	16
5.4 自旋无关形式	17

5.5	自旋关联函数的计算	18
5.6	守恒流的关联函数	19
5.7	动量空间	19
6	闵氏共形场论	20
6.1	量子力学的例子	20
6.2	一些很数学的东西	20
6.3	延拓的实际方法	22
6.4	么正性边界	23
7	影子变换和光变换	23
7.1	背景	23
7.2	更深入的嵌入形式	24
7.3	李代数的 Weyl 群	26
7.4	”影子”变换 (Shadow Transform)	26
7.5	光变换	26
7.6	关联函数的光变换	27
8	光线算符	27
9	共形 Regge 理论	27
10	光线算符与 ANEC	27
11	高维共形反常	27

1 引言和前置

1.1 背景和动机

量子场论是一个 (比较) 古老, 但至今也没有被人们完全理解的理论. 绝大多数经典的场论教科书可能着力于在不同的理论中微扰论意义下对费曼图和散射截面的各种计算. 然而这一切显然只覆盖了量子场论的一小部分, 还有大量深刻的物理结构被埋藏在费曼图之外. 而我们的目的就是从一个有类特殊对称性的场论——共形场论出发, 脱离于具体的微扰计算, 来试图尽可能多地挖掘场论背后的物理结构.

这里是一些背景介绍和一大堆相关文献.

1.2 一点公理化量子场论

”量子场论是什么?” 这个问题到现在也缺乏一个严格的定义. 虽然在自由场的理论中这一切只不过看起来就是一个模式展开和二次量子化, 但对于一个一般的场论, 想给量子场论一个确切的定义是困难的. 而”路径积分”本身也是在很多追求严谨的物理学家和数学家眼中非常不严谨的.

在 20 世纪 60 年代, 由 Wightman, Osterwalder 为代表的物理学家发展了最早的”公理化量子场论”. 回顾这些内容能对我们对之后共形场论——一些有特殊对称性的量子场论的性质有更明确的认识.

我们首先在欧氏时空中看这一切, 在欧氏时空中, 存在一些局域的场算符 $\phi_i(x)$, 它们可能携带有一些 $SO(d)$ 指标. 而在场论中, 直觉上看最核心的”可观测量”是一些东西的”期待值”, 即 n 点关联函数.

我们从 Osterwalder-Schrader 公理 [6] 出发来定义一个”关联函数”.

在场论的意义下, 我们先在欧氏时空下定义一些场变量所对应的局域算符 $\phi(x)$ Osterwalder–Schrader 公理如下:

Osterwalder–Schrader Axioms

欧氏时空下的 n 点关联函数 (Schwinger 函数) $S(x_1, x_2 \dots x_n) = \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) \rangle$ 应该满足以下性质:

- (E0) 缓增性: 一些很数学的数学技术, 总之我们可以认为这个关联函数不是特别病态.^a
- (E1) 欧氏协变性: 关联函数在欧氏旋转和平移下协变
- (E2) 反射正性: 如果一个偶数点关联函数一半的坐标是另一半坐标的时间反演, 那么关联函数非负.^b
- (E3) 对称性: 相同场算符的部分应该置换对称
- (E4) 集团分解: 如果两部分坐标相距趋于无穷远, 那总的关联函数可以拆成两部分关联函数的乘积.

这不难推广到有多种完备的算符的情形. 只要一个这些局域算符的函数满足这些基本性质, 那我们称这个东西就是一个”关联函数”.

^a这会在 6.2 节中被讨论.

^b这比原始的反射正性要弱, 但其意义是保证这个场论中能定义出一些非负的内积.

从公理化量子场论的角度来看, 我们的”关联函数”它不过是一些”满足特殊性质的算符的函数”, 而和我们具体的构造无关.(只不过路径积分能够很快地构造出满足这些性质的东西).

而在闵氏时空, 我们存在”Wightman Axioms”为核心的公理化量子场论 [9], 其中 Wightman 公理的内容再在此不进行细致描述, 其整体内容和欧氏版本几乎一致, 也是定义了一些满足”良好性质”的东西作为所谓的 n 点关联函数 (Wightman 函数).

在欧氏理论和闵氏理论二者之间, 我们有一个定理 [5] 来联系二者:

Osterwalder–Schrader Reconstruction Theorem

在一点技术性假设下, 满足 O-S 公理的欧氏关联函数在做 Wick 转动后可以变成满足 Wightman 公理的闵氏关联函数.

而在我们研究的共形场论中, 如果我们额外假定关联函数也要满足理论的**共形对称性**, 那么我们只靠这些基本的对称性信息, 能对这些关联函数的形式给出**极强的限制**. 因此很多物理学家就可以通过一些共形场论技术, 对理论的多点关联函数满足的一般性质进行研究.

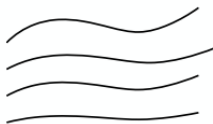


图 1: 量子化时需要把空间分割为若干用时间标记的超曲面.

这一切还没有完, 我们虽然公理化地定义了一些”关联函数”, 但距离一个完整的量子理论, 我们还需要再定义系统的**量子态及其演化**. 就是这种”量子态及其演化”的定义让我们必须定义一个”**时间变量**”, 来把时空划分成一些**等时超曲面**. 从而在这上定义量子态的演化, 比如通过时间演化算符, 或者定义路径积分

等等.

而在这个过程中, 因为出现了时间, 就自然会存在一些”排序”的结构, 如量子场论中的”编时 (Time Ordering)”, 或者之后共形场论中的”径向排序 (Radial Ordering)”等等. 这种”时间”的选取在共形场论中会体现为不同的量子化方案, 最典型的是径向量子化, 同时存在如 N-S 量子化的其它方案.

2 共形对称性

2.1 基本的共形不变性

在一个理论演化到重整化群的不动点时, 这个理论会具有一个标度不变性, 即:

$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$$

这是一个庞加莱变换以外的对称性, 因此我们可以一般地考虑一些除了平移和旋转以外的对称性来扩展庞加莱群. 这就对应了 Coleman-Mandula 定理的一个著名反例, 即没有质量间隙 (一个特征能标) 的系统. 而特别地, 如果一个重整化群不动点处系统有标度不变性, 它很有可能被提升成为共形不变性. 这在二维理论中是必然的, 而在高维理论中还是一个开放问题. 详细的讨论见 [3].¹

我们定义共形变换为一些特殊的微分同胚变换, 而这个微分同胚变换使得变换后的度规张量和原来的只相差一个局域的缩放因子:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x) \quad (1)$$

众所周知, 度规张量是一个张量, 所以有:

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma} = \Lambda(x)g_{\mu\nu} \quad (2)$$

考虑变换的无穷小形式, 即 $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$, 我们得到:

$$\begin{aligned} (\delta_\mu^\rho - \partial_\mu \epsilon^\rho) (\delta_\nu^\sigma - \partial_\nu \epsilon^\sigma) g_{\rho\sigma} &= \Lambda(x)g_{\mu\nu} \\ (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) &= f(x)g_{\mu\nu}(x) \end{aligned} \quad (3)$$

这里是一些推导过程, 等我有空了会抄大黄书.

经过一些绝大多数共形场论教材上都会有的推导, 我们能发现变换应该满足:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu &= \frac{2}{d} \partial \cdot \epsilon g_{\mu\nu} \\ \partial^2 f &= 0 \\ (d-2)\partial_\mu \partial_\nu (\partial \cdot \epsilon) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

在 $d \neq 2$ 的场合, 我们能得到 ϵ 的解应该是一个 x 的不超过 2 次的多项式, 所以有:

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu + c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho \quad (5)$$

对于 a_μ 项, 代入发现这不会有任何限制. 这对应了对 x^μ 的无穷小平移.

对于 $b_{\mu\nu}x^\nu$ 项, 我们发现 $b_{\mu\nu}$ 应该满足方程:

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d} g_{\mu\nu} b_\rho^\rho \quad (6)$$

¹显然共形不变性比标度不变性而言是一个更强的对称性, 后文一些多点函数的形式如果只有标度不变性是无法确定下来的.

即 $b_{\mu\nu}$ 的对称部分严格正比于度规张量, 显然, 这对应了伸缩变换. 而 $b_{\mu\nu}$ 的反对称部分则不受任何限制, 小学生都知道这对应了旋转变换 (对闵氏度规则是空间旋转和 Boost). 那我们继续看 $c_{\mu\nu\rho}$, 如果定义 $b_\mu = \frac{1}{d}c_{\mu\rho}^\rho$, 那么它应该满足:

$$c_{\mu\nu\rho} = g_{\mu\rho}b_\nu + g_{\mu\nu}b_\rho - g_{\nu\rho}b_\mu \quad (7)$$

这个生成的变换比较陌生, 它对应的形式是

$$\epsilon_\mu = 2(x \cdot b)x_\mu - x^2b_\mu \quad (8)$$

它被称作所谓的”特殊共形变换 (SCT)”. 它的几何意义是, 如果我们先做反演变换 $x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu}{x^2}$, 再进行 b^μ 大小的平移, 再反演回去, 得到的新坐标. 写成有限大的形式就是:

$$x'^\mu = \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2} \quad (9)$$

在共形场论中, 理论的基本时空对称性得到了扩展, 其对称群从庞加莱群变成了更大的”共形群”, 这一扩展让我们能从中得到许多重要性质.

2.2 共形群的结构

就像前面所说的, 想要研究具有共形对称性的场论, 我们就应该先仔细研究其对称群——共形群和其李代数. 为了研究共形群生成元组成的李代数的对易关系, 我们可以先找它的一个最简单的表示空间——标量函数, 来研究它们的性质.

对于一个作用于标量函数上的共形变换, 以平移为例, 我们可以写下平移变换的生成元²:

$$e^{ia^\mu P_\mu} f(x^\mu) = f(x^\mu + a^\mu) \quad (10)$$

对无穷小变换, 就有:

$$P_\mu = -i\partial_\mu \quad (11)$$

类似地, 我们在这个约定下, 我们可以写下平移, 伸缩, 旋转和特殊共形变换的生成元在标量函数空间的表示:

$$\begin{aligned} P_\mu &= -i\partial_\mu \\ D &= -ix^\mu \partial_\mu \\ L_{\mu\nu} &= -i(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu) \\ K_\mu &= -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu) \end{aligned} \quad (12)$$

共形群一共有 d 个平移, 1 个伸缩, $\frac{d(d-1)}{2}$ 个旋转和 d 个特殊共形变换, 一共 $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$ 个生成元. 这些生成元和其对易关系构成了共形群的李代数. 不难验证, 这些生成元之间满足如下的对易关系:

$$\begin{aligned} [D, P_\mu] &= iP_\mu \\ [D, K_\mu] &= -iK_\mu \\ [K_\mu, P_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}) \\ [K_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu) \\ [P_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu) \\ [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}) \end{aligned} \quad (13)$$

²有限大变换对应的生成元加不加 i 这件事不同材料不一样

那么共形群的李代数有什么样的结构呢? 我们敏锐地注意到, 如果我们做如下代换:

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}, J_{-2,\mu} = \frac{P_\mu - K_\mu}{2}, J_{-1,\mu} = \frac{P_\mu + K_\mu}{2}, J_{-2,-1} = D \quad (14)$$

即:

$$J_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & D & \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) \\ -D & 0 & \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu) \\ -\frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) & -\frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu) & L_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (15)$$

我们经过一些计算, 发现 J_{AB} 满足对易关系:

$$[J_{AB}, J_{CD}] = -i(\eta_{AC}J_{BD} + \eta_{BD}J_{AC} - \eta_{AD}J_{BC} - \eta_{BC}J_{AD}) \quad (16)$$

其中我们规定 $\eta_{AB} = \text{diag}(-1, 1\eta_{\mu\nu})$. 因此共形群的李代数同构于一个更高维的洛伦兹群的李代数. 或者细致地说, \mathbb{R}^d 的共形群李代数同构于 $SO(d+1, 1)$ 的李代数, 而 $\mathbb{R}^{d-1, 1}$ 的共形代数同构于 $SO(d, 2)$ 的李代数. 这个结构非常重要, 因为它直接为之后的 Embedding Formalism 提供灵感.

另外一个值得一提的事是, 反演变换 $x \rightarrow \frac{x^\mu}{x^2}$ 显然也是一种共形变换, 但它处于另一个连通分支里面.

2.3 共形群的表示

在量子场论中, 我们有**粒子是庞加莱群的不可约表示**这一著名论断. 而在共形场论中, 我们的庞加莱群被扩展到了共形群, 因此寻找共形群的不可约表示是十分重要的.

我们回顾在一般量子场论中研究庞加莱群不可约表示的方法, 在研究庞加莱群之前, 物理学家更愿意研究其无视平移以外的子群——洛伦兹群的表示. 在这里, 我们同样地, 当没有平移时, 我们还剩下旋转, 伸缩和 SCT, 在这里我们分别用 $S_{\mu\nu}, \tilde{\Delta}, \tilde{K}_\mu$ 来代表这些生成元在特定表示下的矩阵.³

首先对 $S_{\mu\nu}$ 这部分, 我们假定, **如果这个场是转动群/洛伦兹群的一个有限维不可约表示**. 这样的场我们称它为”基本场 (Primary Field)”⁴, 就像在量子场论中粒子要作为庞加莱群的不可约表示一样. 我们这样完全可以仿照转动群/洛伦兹群的策略, 找一个通常的有限维不可约表示, 其表示对应了这个算符的自旋 j . 在此后, 我们发现:

$$[D, L_{\mu\nu}]_{rep} = [\tilde{\Delta}, S_{\mu\nu}] = 0 \quad (17)$$

根据群论的舒尔引理⁵, 和它对易的矩阵应该是单位矩阵, 因而对应的 $\tilde{\Delta}$ 是一个普通的数, 而 SCT 的表示矩阵就应该是零. 不难验证, 这个表示确实是不可约的. 因此我们可以用一个 c 数 $\Delta = i\tilde{\Delta}$ 和一个洛伦兹群的表示来刻画共形群的一个不可约表示.

$$\begin{aligned} [\Delta, S_{\mu\nu}] &= 0 \\ [\Delta, \kappa_\mu] &= \kappa_\mu \\ [\kappa_\rho, S_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}\kappa_\nu - \text{perms}) \\ [S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] &= \text{Lorentz Group's result} \end{aligned} \quad (18)$$

而对于原点以外的局域算符, 我们再考虑平移的影响, 这样会加上一些额外的项, 比如:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= e^{ix \cdot P} \phi(0) \\ P_\mu &= -i\partial_\mu \end{aligned} \quad (19)$$

³要注意, 这里和大黄书的约定相同, 这些生成元是直接作用于算符上的, 因此生成元而非其伴随作用于算符上, 这和后面的约定有一点不同

⁴在后面我们能得到它和基本场其余定义的兼容性.

⁵这是在洛伦兹表示不可约的假定下才成立的, 因此对于非基本场, 我们没有这个条件了

我们用类似的方法来处理其它算符, 得到最终的结果如下:

$$\begin{aligned}
P_\mu &= -i\partial_\mu \\
L_{\mu\nu} &= S_{\mu\nu} - i(x_\nu\partial_\mu - x_\mu\partial_\nu) \\
D &= -i\Delta - ix^\mu\partial_\mu \\
K_\mu &= -2ix_\mu\Delta - x^\nu S_{\mu\nu} - 2ix_\mu x^\nu\partial_\nu + ix^2\partial_\mu
\end{aligned} \tag{20}$$

这就是以共形场算符作为表示空间时, 共形群的表示矩阵. 如果这个场不是基本场, 那么在 K_μ 部分还会多一个额外的表示矩阵.

我们刚刚构造的表示相当于让一个场是 Δ 生成变换的本征态, 而且在 κ_μ 生成的特殊共形变换下不变.(只考虑 $x = 0$ 处), 这样的场在后面会看到, 是所谓的”基本场”.

在这之后, 我们可以考虑用算符 P_μ 作用于基本场, 它们对应基本场的空间导数, 我们称之为导出场 (Descendent Field).

当我们有了表示矩阵之后, 就能研究共形变换对场的作用了, 对于任意的一个有限大共形变换, 它的形式应该是:

$$G_c = \exp\left(-i\alpha D - i\beta_\mu K^\mu - ia_\mu P^\mu - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} L^{\mu\nu}\right) \tag{21}$$

我们把这些生成元展开, 不难注意到, 含有 x 和 ∂ 的部分和纯的对函数的空间变换完全一样, 它们对应的是坐标变换. 而我们把 Δ 和 $S_{\mu\nu}$ 收集到一起, 顺便为了方便, 假定算符是标量算符, 让 $S_{\mu\nu} = 0$, 这样只需要考虑 Δ 的部分, 它们对应的应该是场本身的变换:

$$\phi'(x') = e^{-i\alpha(-i\Delta) - i\beta_\mu(-2ix_\mu\Delta)}\phi(x) \tag{22}$$

但与此同时, 对于一个共形变换, 其行列式也应该为:

$$J = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = e^{d(\alpha + 2\beta \cdot x)} \tag{23}$$

因此我们发现, 对于一个共形变换, 基本场的变化应当拥有 $-\Delta$ 的标度量纲一样:

$$\phi'(x') = J^{-\Delta/d}\phi(x) \tag{24}$$

比如在 $x' = \lambda x$ 的伸缩变换下, 这个基本场就会有 $\lambda^{-\Delta}$ 的伸缩.

2.4 共形 Ward 恒等式

在量子场论中, 诺特定理的量子版本就是 Ward 恒等式. 共形对称性能给我们很多新的守恒律.

让我们回忆一下 Ward 恒等式的结论, 对一个对称变换, 它造成算符 \mathcal{O} 变化量为 $\delta\mathcal{O}$, 而这个变换的守恒流是 J^μ , 那么就有 Ward 恒等式:

$$\partial_\mu \langle J^\mu O_1 \dots O_n \rangle = -i \sum_j \langle O_1 \dots \delta O_j \dots O_n \rangle \delta^d(x - x_j) \tag{25}$$

而在诺特定理告诉我们, 守恒流的形式为:

$$J^\mu = T^{\mu\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \tilde{\delta} \phi \tag{26}$$

其中这里的能动量张量是正则能动量张量:

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{L}g^{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi \tag{27}$$

我们就可以对平移, 旋转, 伸缩, 特殊共形变换, 针对基本场来应用这些 Ward 恒等式. 不过这样的构造也有一点问题, 那就是守恒流除了能动量张量以外, 还会显式地依赖拉氏量的偏导数, 但在共形场论中, 我们可以通过对能动量张量的重定义, 把偏导数项吸收进去, 最后得到这些守恒流为:

$$J_T = T^{\mu\nu} \quad (28)$$

$$J_{Rot} = T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu \quad (29)$$

$$J_{Dia} = T^{\mu\nu} x_\nu \quad (30)$$

而 SCT 的守恒流是平凡的, 同样是 T 和 x 的线性组合.

2.5 两点函数

如果理论具有共形不变性, 那么系统的两点函数可以通过对称性直接确定出来, 在这里我们采用一种直接但笨拙的方式来得到两个基本场的两点函数

这里是从平移, 旋转, 伸缩, 特殊共形变换的角度证明两点函数的形式.

这里是用上面的方法得到三点函数的形式.

这里是用上面的方法得到共形不变四点函数.

3 径向量子化

3.1 量子态的引入

我们在前面提及了, 对于一个”量子场论”, 为定义量子态和它的演化, 就需要把时空划分为一些等时的超曲面来选定一个”时间”, 来定义其”时间”演化.

在我们 3+1 维时空的量子场论中, 显然”时间 (时空的第 0 个坐标, 度规的异号位置)”方向会被用来选做时间, 而在不同的等时双曲面之间的态需要的时间演化算符联系, 在这里它对应的是在这一方向上的平移生成元, 即哈密顿量:

$$U(\Delta t) = e^{iP^0 \Delta t} \quad (31)$$

在 (特别是欧氏的) 共形场论中, 物理学家更喜欢另一种方式, 不选择特定的某个坐标, 而是让”半径”作为时间方向, 即选定”等时面”为若干 **D-1 维球**. 这样相对应的时间演化算符就对应了伸缩变换的生成元:

$$U(\Delta\tau) = e^{iD\Delta\tau}, \quad \tau = \ln r \quad (32)$$

因此对于一个状态, 我们可以用它的伸缩本征值 Δ 和在 $SO(d)$ 作用下的表示来标定. 另外要说一下, 在径向量子化中改变坐标原点这件事类似于一般量子场论中的洛伦兹变换, 即改变另一个参考系.

另外非常值得一提的是, 在这里共形群的生成元作用于量子态, 而非场算符上. 即这些量子态是另一个表示空间, 对于这个空间, 共形群生成元才伴随作用于局域的场算符, 即:

$$\begin{aligned} [P_\mu, O(x)] &= -i\partial_\mu O(x) \\ [D, O(x)] &= -i(\Delta + x \cdot \partial)O(x) \\ [L_{\mu\nu}, O(x)] &= -i(\sigma_{\mu\nu} + x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)O(x) \\ [K_\mu, O(x)] &= -i(2x_\mu \Delta + 2x^\lambda S_{\lambda\mu} + 2x_\mu (x \cdot \partial) - x^2 \partial_\mu)O(x) \end{aligned} \quad (33)$$

我们选择”径向量子化”的一个主要原因就是在这样的方案下, 我们可以实现共形场论的一个重要性质: **算符-态对应**.

3.2 局域算符和量子态

在量子场论中, 一个局域算符作用于真空上会产生一个量子态. 而态之间的 (径向排序的) 关联函数会用路径积分给出. 那么如何定义一个所谓的”量子态”呢? 一个很好的方法是给定它和所有其它量子态 (任意给定的某个半径处的场构型) 的内积, 这些内积所包含的全部信息就对应了一个我们想要的量子态.

第一个需要建立的态就是真空态, 假设一个区域内没有任何算符, 对它里面的一切做路径积分得到的就是真空态⁶. 这个真空态自动满足在所有的对称变换下的不变性.⁷ 换句话说如果我们固定在某一半径处

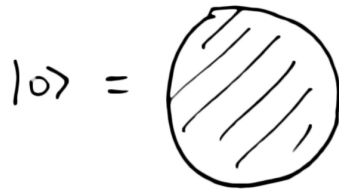


图 2: 真空态就是什么也没有的路径积分

的场构型, 相当于选定一个任意的态, 那么它和真空态的内积就是:

$$\langle \phi_b | 0 \rangle = \int_{r \leq 1, \phi(r=1) = \phi_b} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \quad (34)$$

这些信息正好能够给出真空态.

而如果我们插入一个算符:

$$\langle \phi_b | O(x) | 0 \rangle = \int_{r \leq 1, \phi(r=1) = \phi_b} \mathcal{D}\phi O(x) e^{-S[\phi]} \quad (35)$$

这样, 通过取不同的 ϕ_b , 这个内积也会变化, 这样的全部行为很显然, 给定了它和任意量子态的内积. 表现

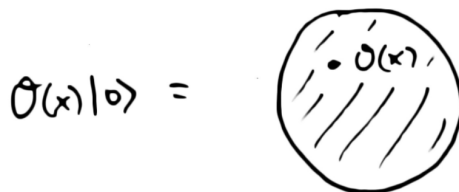


图 3: 在路径积分中插入算符来构造量子态

起来, $O(x)|0\rangle$ 这个整体就像另一个量子态一样, 所以这个操作定义了算符 $O(x)$ 所定义的量子态, $O(x)|0\rangle$. 在这个语境下, 真空态对应的就是在这里插入一个单位算符. 所以我们**通过插入一些局域算符, 能得到量子态**.

我们接下来反其道而行之, 考虑一个量子态, 不妨把它设为是伸缩算符的本征态:

$$D|O_i\rangle = \Delta_i|O_i\rangle \quad (36)$$

⁶这件事是因为原点在径向量子化中对应渐进无穷远的过去, 而时间演化算符中非真空的项会被指数压低从而得到真空态. 对于闵氏时空, 我们在解析延拓时需要加入 $i\epsilon$. 在一些二维共形场论, 比如 $b-c$ CFT 中, 这对应的就不是真空态.

⁷这可以从广义对称性理论中对称变换作为拓扑算符, 而真空这个区域拓扑平庸来理解.

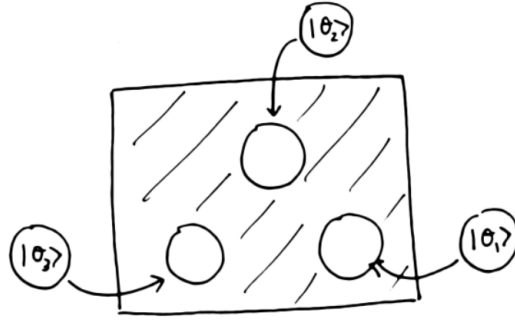


图 4: 量子态对应到一些局域的洞上, 其行为类似于局域算符

那么我们可以如此定义这些状态的某种关联函数. 把量子态对应到在空间中挖掉一些局域的洞, 在洞的边界上, 其边界条件的行为由每个洞对应的那个量子态上决定, 然后进行路径积分, 再对洞以外的区域全体进行路径积分:

$$C(|O_1\rangle x_1, \dots |O_n\rangle x_n) = \int \prod_i \mathcal{D}\phi_{\partial B} \langle \phi_{ni} | O_i \rangle \int \mathcal{D}\phi(x) e^{-S[\phi]} \quad (37)$$

而通过一些恰当的伸缩变换, 这些洞的尺度可以被证明是无紧要的, 这样这个路径积分的行为就和一些局域算符的关联函数的行为一样, 因此我们通过这种方式把量子态对应到了一些局域算符上.

3.3 算符-态对应

通过上面的论述, 我们发现算符和态之间确实存在一些关系, 而在共形场论中, 我们有一个非常强的结论, 那就是:

算符-态对应: 共形场论的量子态和原点处的局域算符一一对应

对于真空态, 它在上面所说, 对应不插入任何算符, 或者说插入的只是单位算符.

在此基础上, 如果我们在原点处插入一个基本场算符, 生成的量子态是 $|\Delta\rangle = O(0)|0\rangle$, 我们可以证明, 这个生成出来的量子态确实有 Δ 的缩放维数:

$$\begin{aligned} D|\Delta\rangle &= DO(0)|0\rangle = [D, O(0)]|0\rangle + O(0)D|0\rangle \\ &= i\Delta|\Delta\rangle \end{aligned} \quad (38)$$

而如果我们插入的是原点以外的局域算符, 我们不难发现, 它可以写成原点处算符产生的态的基础上再进行一个空间平移 e^{iP_x} 操作, 得到的是一些 $P|\Delta\rangle$ 的态.

而又因为我们有对易关系:

$$[D, P_\mu] = iP_\mu, \quad [D, K_\mu] = -iK_\mu \quad (39)$$

算符 P_μ 和 K_μ 在这个意义上就像是一些升降算符, 它们作用在 $|\Delta\rangle$ 态上, 对应的是升高/降低了 Δ 的一些态.

因此对于那些不在原点的基本场, 或者它们的导数算符, 这些算符对应的状态相当于我们在原本的状态 $|\Delta\rangle$ 作用上去算符 P , 它们恰好是我们在之前提及的导出场. 它们叫做导出算符/导出态.

另一个问题是, 对于 K_μ , 它能够降低 Δ 指标, 但这个下降过程如果我们规定, 必须要有一个尽头, 即 Δ 有下界, 我们称这个最低的态 (和其对应的算符) 就是前文提到的基本场的一个公理化定义. 从这个角度来看, 基本场就是共形代数最低权表示的最低权态. 一切满足这样性质的共形场论我们称之为一个”么正共形场论”.

3.4 么正边界

在什么场合一个共形场论是么正的? 不同的情景会给出不同的约束, 比如之后的 ANEC 条件就会从 OPE 系数角度给出为了满足么正性, 一个共形场论的条件. 其中最著名的么正性边界就是对基本算符两个的下界:

$$\begin{aligned}\Delta_{min}(l \neq 0) &= l + D - 2 \\ \Delta_{min}(l = 0) &= \frac{D}{2} - 1\end{aligned}\tag{40}$$

这里是一些证明

3.5 OPE 性质证明

通过一些数学手段, 我们可以证明对于么正共形场论, 所有的算符都至多是基本算符和它们的导出算符的线性组合.

这里是一些数学证明.

4 算符积展开

在径向量子化框架中, 我们提到了算符可以对应到量子态

4.1 共形不变性的限制

在量子理论中, 我们可以在一些关联函数中间插入一组完备的态来辅助我们的计算, 而在共形场论中, 由于算符-态对应的影响, 我们有更强大的工具: **算符积展开**.

理解这件事其实很简单. 我们考虑两个算符它们整体产生的状态, 根据算符态对应, 这个状态肯定能分解成若干基本场和导出场产生的状态的叠加, 我们就可以把这个状态进行分解如下:

$$O_i(x)O_j(0) = \sum_k C_{ijk}(x, \partial)O_k(0)\tag{41}$$

这就是共形场论的算符积展开, 而 $C_{ijk}(x, \partial)$ 是对应的展开系数, 它描述了两个算符的状态是如何分解成单算符产生的状态的. 这个展开系数当然, 反应了共形场论内部的动力学信息. 这一展开的收敛区域非常显然, 就是算符 1 的相对外侧. 这样路径积分时才不会产生影响.

和量子场论作对比, 量子场论中的算符积展开只会在短程极限下成立, 是一种渐近展开, 而共形场论的算符积展开在一定收敛半径内都是精确成立的, 这来自于其算符-态对应的性质/

与此同时, 因为这些算符具有共形不变性, 我们在上式两端同时作用一些共形变换, 两侧的结果应该保持相同. 这能给我们一些关于算符积展开系数的运动学约束.

首先对于伸缩变换, 即简单的量纲分析, 我们得到:

$$C_{ijk} \propto |x|^{\Delta_k - \Delta_i - \Delta_j} (1 + \alpha x \cdot \partial + \dots)\tag{42}$$

同样, 我们通过作用 SCT 的算符, 也可以得到对其他项的约束.

这里有一些具体的计算

我们从三点函数开始, 利用算符积展开系数而不是纯运动学关系, 也可以尝试得到之: 我们考虑一个标量三点函数:

$$\langle \phi_1(x)\phi_2(0)\Phi(z) \rangle = \sum_O \lambda_O C_O(x, \partial_y) \langle O(y=0)\Phi(z) \rangle \quad (43)$$

但对于两点函数, 它们是对角的, 只有 $O = \Phi$ 时才有非零的贡献:

$$\langle \phi_1(x)\phi_2(0)\Phi(z) \rangle = \lambda_\Phi C_\Phi(x, \partial_y) \langle \Phi(y=0)\Phi(z) \rangle \quad (44)$$

但这个两点和三点关联函数的两边都是我们所知道的, 停展开计算就能得到:

$$C_\Phi = \frac{1}{|x|^{2\delta_\Phi - \Delta_\Phi}} \left(1 + \frac{1}{2} x \cdot \partial + \frac{\Delta + 2}{8(\Delta + 1)x^\mu x^\nu \partial_\mu \partial_\nu} + \dots \right) \quad (45)$$

4.2 共形块

三点关联函数会被运动学在一个归一化系数的意义下被确定, 而在四点和以上的场合, 这个关联函数的形式是有相当大的自由度的:

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \rangle = \frac{g(u, v)}{x_{12}^{2\Delta} x_{34}^{2\Delta}} \quad (46)$$

为了计算这个四点函数的具体形式, 我们就可以用算符积展开的技术来把它拆成一些三点函数: 我们分别对前两点和后两点进行算符积展开如下:

$$\begin{aligned} \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \rangle &= \sum_{O, O'} f_{\phi\phi O} f_{\phi\phi O'} C_a(x_{12}, \partial_2) C_b(x_{34}, \partial_4) \langle O^a(x_2) O'^b(x_4) \rangle \\ &= \sum_{O, O'} f_{\phi\phi O} f_{\phi\phi O'} C_a(x_{12}, \partial_2) C_b(x_{34}, \partial_4) \frac{I^{ab}}{x_{24}^{2\Delta_O}} \delta_{OO'} \\ &= \frac{1}{x_{12}^{2\Delta_\phi} x_{34}^{2\Delta_\phi}} \sum_O f_{\phi\phi O}^2 g_O(x_i) \end{aligned} \quad (47)$$

其中 I^{ab} 是对可能的矢量算符关联函数里面可能的张量结构.

我们把这里面的 $g_{\Delta, l}(x_i)$ 就定义为”共形块”, 它显然有:

$$g_{\Delta, l}(x_i) = x_{12}^{2\Delta_\phi} x_{34}^{2\Delta_\phi} C_a(x_{12}, \partial_2) C_b(x_{34}, \partial_4) \frac{I^{ab}(x_{24})}{x_{24}^{2\Delta}} \quad (48)$$

我们不难发现, 这个共形快实际上应该只是交叉比 u, v 的函数 (因为 OPE 系数在这个约束下也会有幂次依赖), 我们因此可以把任意四点函数的结构分解为共形块的结构:

$$g(u, v) = \sum f_{\phi\phi O}^2 g_{\Delta, l}(u, v) \quad (49)$$

4.3 共形块的解析计算

我们可以通过利用共形代数的卡西米尔算子的方法来试图解析计算这些共形块.

4.4 数值共形自举

这里应该有一段对数值共形自举的详细介绍

5 关联函数技术

5.1 嵌入形式 (Embedding Formalism)^j

共形群在 \mathbb{R}^d 的作用是非线性的, 我们想检验一个东西在特殊共形变换下的不变性是非常麻烦的, 这让人很头疼. 而一旦涉及到各种矢量和张量的多点关联函数, 其结果的运动学结构就更加复杂了. 所以我们试图找到共形群一个尽量线性的简单实现, 在那里方便地写下关联函数.

在 2.2 节中我们发现, 通过使用一点小技巧, \mathbb{R}^d 的共形代数同构于 $SO(d+1, 1)$ 的李代数, 而 $\mathbb{R}^{d-1, 1}$ 的同构于 $SO(d, 2)$ 的李代数.

因此, 为了研究场在共形群下的表示, 我们完全可以把这一切移到 $SO(d+1, 1)$ 群的表示空间来研究, 而这件事等价于研究一个 $\mathbb{R}^{d+1, 1}$ 时空下的向量和张量, 这就是共形群的一种实现.⁸ 我们叫它 Embedding Space Formalism.

因此, 我们考虑在这个空间中的一个点 $X = (X^+, X^-, X^1, \dots, X^d)$, 其中后面 d 个坐标我们不妨让其结构和欧氏空间相同, 而前两个坐标我们为了方便起见采用了光锥坐标, 它对应度规为:

$$X^2 = -X^+X^- + \sum_{\mu}^d X^{\mu}X_{\mu} \quad (50)$$

但这个空间的一个坐标包含的信息显然太多了, 在我们 R^d 空间中, 只有 d 个自由度, 而这里有 $d+2$ 个, 因此我们可以加一些不会破坏系统对称性, 并且要尽可能简单的约束条件, 来消掉这两个冗余的自由度.

第一个自然想到的约束就是规定点必须限制在一个光锥上, 因为长度是一个洛伦兹不变量, 这个约束并不会破坏系统的对称性, 而长度为零是最简单的情形, 不引入任何额外的尺度, 即:

$$X^2 = 0 \quad (51)$$

它等价于规定了: $X^+X^- = X^{\mu}X_{\mu} = x^2$

而另一个自由度想要消除我们就没有那么好的事了, 我们找不到第二个洛伦兹协变的约束条件. 不过我们可以换一个角度, 把冗余的自由度给”Gauge 掉”, 仿照投影平面的思路, 用最简单的方式——商掉整体的伸缩 $X \sim \lambda X$:

$$\text{Projective Nullcone} = \frac{\{X^2 = 0\}}{X \sim \lambda X, \lambda \neq 0} \quad (52)$$

在这个视角下, 每根”光线”就对应了物理空间的一个点. 但为了用某个点描述它, 我们还是需要选取特定的规范, 为了计算方便, 接下来采用的规范就是直接让 $X^+ = 1, X^- = x^2$, 这被称作所谓的”庞加莱截面”. 即所有的点 x^{μ} 都在 Embedding Space 中对应了点 $X = (1, x^2, x^{\mu})$, 而它无法覆盖到的 $X^+ = 0$ 点, 我们不难发现, 它在一个 Scaling 的意义下等价于 x 的无穷远, 所以我们把它对应到无穷远点. 这个庞加莱截面的示意图如下: 即我们在经过规范固定之后, 那么这个作用看上去就不再是线性的, 即先进行空间旋转, 再把它伸缩到 $X^+ = 1$ 的位置上.

接下来, 让我们看看通常的共形变换在这里对应了什么.

第一个是考虑它纯空间部分的 $SO(d)$ 子群旋转, 即

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_{\nu}^{\mu} \end{pmatrix}, \quad R_{\nu}^{\mu} \in SO(d) \quad (53)$$

这部分作用的结果显然就是在原欧氏空间上的空间旋转.

⁸虽然作用看上去是线性作用, 但在后面的构造中我们手动模掉了伸缩自由度并固定一个规范以至于它看起来是非线性的

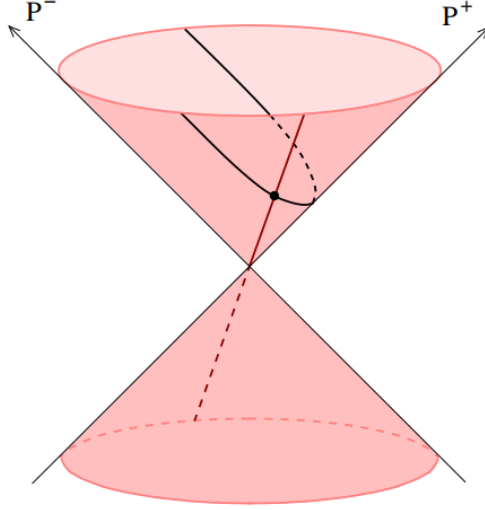


图 5: 第一个约束把一切限制在光锥上, 而我们把嵌入空间伸缩自由度 Gauge 掉, 光锥上的每条光线和物理空间的每个点一一对应, 而规范固定把它限制在了光锥上的一个截面.

第二个是考虑它在 X^+ 与 X^- 方向上进行分别的伸缩:

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{\nu}^{\mu} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad (54)$$

在光锥坐标下, 这可能不是很显然, 但如果把它代换到通常的闵氏坐标, 我们不难发现这是一个沿着光锥坐标的方向的一个 Boost. 而它的作用效果是 $X \rightarrow gX = (\frac{1}{\lambda}, \lambda x^2, x^{\mu})$. 但我们因为只考虑光锥的截面, 还要把它伸缩到 $gX^+ = 1$ 的地方, 伸缩之后得到:

$$X' = gX / (gX)^+ = (1, \lambda^2 x^2, \lambda x^{\mu}) \quad (55)$$

这就对应了全局的伸缩变换 $x^{\mu} \rightarrow \lambda x^{\mu}$.

剩下两个变换在闵氏坐标意义下应该分别是时间与 R^d 部分之间的 Boost, 和光锥方向与 R^d 部分之间的旋转. 或者这二者的混合. 我们直接给出第三个变换的矩阵如下, 我们不难验证它确实是属于 $SO(d+1, 1)$ 的.

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & 1 & 2a_{\nu} \\ a^{\mu} & 0 & \delta_{\nu}^{\mu} \end{pmatrix}, \quad a^{\mu} \in \mathbb{R}^d \quad (56)$$

它的作用效果是:

$$X' = gX = (1, x^2 + a^2 + 2a \cdot x, x^{\mu} + a^{\mu}) \quad (57)$$

这非常显然, 就是一个平移 $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + a^{\mu}$

而最后一个变换的矩阵是:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & b^2 & -2b_{\nu} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b^{\mu} & \delta_{\nu}^{\mu} \end{pmatrix}, \quad b^{\mu} \in \mathbb{R}^d \quad (58)$$

它作用之后 $X \rightarrow gX = (1 + b^2 x^2 - 2b \cdot x, x^2, x^{\mu} - b^{\mu} x^2)$, 再把它伸缩回去, 我们得到:

$$X' = gX / (gX)^+ = \left(1, \frac{x^2}{1 - 2b \cdot x + 2b^2 x^2}, \frac{x^{\mu} - b^{\mu} x^2}{1 - 2b \cdot x + 2b^2 x^2} \right) \quad (59)$$

这就是剩下的那个特殊共形变换.

而与此同时我们也发现, 对于改变度规张量的两个变换 (伸缩和特殊共形变换), 它们改变的尺度因子 $\Omega(x') = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = \det \left| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right|$ 我们不难计算, 分别为:

$$\Omega(x')_{\text{伸缩}} = \lambda, \quad \Omega(x')_{SCT} = \frac{1}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2} \quad (60)$$

注意到, 这恰好为我们之前除掉的 $(gX)^+$ 这一项的大小, 所以我们有关系:

$$\Omega(x') = \frac{1}{(gX)^+} \quad (61)$$

额外提一下, 这个尺度因子 gX^+ 某种意义上对应的是其诱导度规和平直度规之间的 Weyl 缩放因子.

5.2 基本标量算符

在共形场论中, 一个基本算符会按照这样的方式被变换.

$$\phi(x) \rightarrow \Omega(x')^{\Delta} \phi(x') \quad (62)$$

在这里的 Ω 是这一变换对度规的缩放程度. 而如果我们通过应用这一嵌入形式, 考虑高维空间的标量场, 我们可以如此定义:

$$\Phi(X) = (X^+)^{-\Delta} \phi(X^{\mu}/X^+) \quad (63)$$

这样我们用投影光锥上面共形基本场的取值来得到某一点处的高维共形场的取值. 不难看出, 在这样的变换下, 我们有:

$$\Phi(X) \rightarrow \Phi(gX) \quad (64)$$

即在共形变换下, 因为 $\Phi(X)$ 的定义前面的因子已经消掉了 $\Omega(x')$ 的影响, 它是真的像一个标量一般的不变量.

我们注意到, 因为我们实际上有两个冗余自由度, 而对 $\Phi(X)$ 的定义才消除了一个, 我们考虑规范固定在此处的影响, 如果我们假定在不同的 $X \rightarrow \lambda X$ 下, 物理对象是不变的, 那么就有 $\Phi(X)$ 为 X 的 $-\Delta$ 齐次多项式, 即:

$$\Phi(\lambda X) = \lambda^{-\Delta} \Phi(X) \quad (65)$$

在这样定义后 (一个条件是限制在光锥上, 另一个条件是齐次), 我们就能保证 $\Phi(X)$ 只对后面 d 个坐标有非平凡的依赖, 它就能正好和我们的基本场相互对应.

而我们也不难发现, 通过取这个高维共形场在光锥截面上的取值, 就正好得到了我们想要的基本场:

$$\phi(x) = \Phi(X = (1, x^2, x^{\mu})) \quad (66)$$

接下来我们可以直接考虑其两点关联函数 $\langle \Phi_1(X_1) \Phi_2(X_2) \rangle$, 得益于这些对称性, 这个关联函数应该有如下性质:

1. 关联函数是 $SO(d+1, 1)$ 不变量
2. 关联函数定义在光锥上, 所以 $X_1^2 = X_2^2 = 0$
3. 关联函数对 X_i 是一个 $-\Delta_i$ 次齐次的
4. 要注意, 因为这一切定义在光锥上, 所以 X 空间并不一定要有平移不变性

非常显然, 为了满足这些条件, 一个洛伦兹不变的两点关联函数只能是:

$$\langle \Phi_1(X_1)\Phi_2(X_2) \rangle = \frac{C\delta_{\Delta_1\Delta_2}}{(-2X_1 \cdot X_2)_1^\Delta} \quad (67)$$

那我们接下来看看它们在庞加莱截面上的取值:

$$\begin{aligned} -2X_1 \cdot X_2 &= -2((1, x_1^2, x_1^\mu) \cdot (1, x_2^2, x_2^\mu)) \\ &= -2\left(-\frac{1}{2}x_1^2 \cdot 1 - \frac{1}{2}x_2^2 \cdot 1 + x_1 \cdot x_2\right) \\ &= (x_1 - x_2)^2 \end{aligned} \quad (68)$$

即

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle = \frac{C\delta_{\Delta_1\Delta_2}}{(x_1 - x_2)^{2\Delta_1}} \quad (69)$$

这共形场论通常方法得出的结果一致.

接下来考虑三点函数, 类似地, 洛伦兹不变量只有坐标的内积, 记 $X_{ij} = -2X_i \cdot X_j$, 而齐次性的要求让三点函数的形式也被在差一个常数的层次上被唯一确定了:

$$\langle \Phi_1(X_1)\Phi_2(X_2)\Phi_3(X_3) \rangle = \frac{f_{123}}{X_{12}^{\frac{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}{2}} X_{23}^{\frac{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}{2}} X_{31}^{\frac{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}{2}}} \quad (70)$$

我们很容易就能发现它给出的确实共形场论是三点关联函数.

5.3 基本向量算符

我们接下来考虑一些携带洛伦兹指标的向量算符 $V^\mu(x)$. 得益于上一节标量算符的分析, 我们自然地想到可以把它提升到一个定义在光锥上面的向量场. 即:

$$V^\mu(x) \sim \mathcal{V}^A(X) \quad (71)$$

最直接的问题就是, 一个矢量场有 d 个自由度, 但是在高维空间的 \mathcal{V}^A 有 $d+2$ 个自由度. 这两个额外的自由度我们可以通过加上一些约束条件来消除.

1. 纵向偏振: $X \cdot \mathcal{V} = X_A \mathcal{V}^A(X) = 0$
2. 规范对称性 $\mathcal{V}^A \sim \mathcal{V}^A + \lambda(X)X^A$

这和我们本科学习的电动力学场合非常类似. 而不难注意到, 这个定义只有在光锥上是自洽的. 而对于那些变换, 我们同样地, 研究它在 $SO(d+1, 1)$ 群下的变换行为就可以了.

在此后, 如果要把它放回到 \mathbb{R}^d 里面, 我们同样进行投影:

$$V_\mu(x) = \frac{\partial X^A}{\partial x^\mu} \mathcal{V}_A(X = (1, x^2, x^\mu)) \quad (72)$$

经过化简, 得到了:

$$V_\mu(x) = \mathcal{V}_\mu(X = (1, x, x^2)) - x_\mu \mathcal{V}^+(X) \quad (73)$$

其中多出来的后面这一项保证了其规范不变性在投到 \mathbb{R}^d 之后还能被保持.

接下来, 为了保证有 $V_\mu(x')$ 作为基本场的性质还能被保持, 我们不难验证, 高维向量应该满足:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^A(\lambda X) &= \lambda^{-\Delta} \mathcal{V}^A(X) \\ V_\mu(x) &\rightarrow \lambda^\Delta V_\mu(x') \end{aligned} \quad (74)$$

在做出以上要求之后, 就能得到向量算符 $V_\mu(x)$ 提升到高维空间 \mathcal{V}^A 的关系

$$\mathcal{V}(X) = (X^+)^{-\Delta} \left(0, -2\frac{X^\nu}{X^+} V_\nu, V^\mu \right) \quad (75)$$

我们不难验证, 这样的定义确实满足其纵向偏振, 且我们选择了 $\mathcal{V}^+ = 0$ 的规范

那么我们为了写下向量基本场的关联函数, 就可以先处理它们提升到嵌入空间之后的场的关联函数, 再投影回去就可以了. 在满足齐次和洛伦兹性质的条件下, 一般的向量场的关联函数应该是:

$$\langle \mathcal{V}_1^A(X_1) \mathcal{V}_2^B(X_2) \rangle = \frac{a\delta^{AB} X_1 \cdot X_2 + bX_1^A X_2^B + cX_2^A X_1^B}{X_{12}^{\Delta_1+1}} \quad (76)$$

其中我们规定了 $X_1^2 = -2X_1 \cdot X_2$, 且两个算符的次数相同. 其中由于我们有规范对称性, 所以可以让 b 项设为 0, 而为了满足纵向偏振性:

$$0 = X_A \langle \mathcal{V}^A \mathcal{V}^B \rangle \sim X_1^B (X_1 \cdot X_2) (a + c) \quad (77)$$

因此有 $a = -c$, 我们的两点函数应该有形式:

$$\langle \mathcal{V}_1^A(X_1) \mathcal{V}_2^B(X_2) \rangle = c \frac{-\delta^{AB} X_1 \cdot X_2 + X_2^A X_1^B}{X_{12}^{\Delta_1+1}} \quad (78)$$

最后把它投影到 \mathbb{R}^d 中去, 就有了最终的结果

$$\langle V_1^\mu V_2^\nu \rangle = c \frac{\frac{1}{2} \delta^{\mu\nu} (x_1 - x_2)^2 - (x_1 - x_2)^\mu (x_1 - x_2)^\nu}{(x_1 - x_2)^{2\Delta_1+2}} \quad (79)$$

5.4 自旋无关形式

这部分技术主要参考了文章 [2] 中涉及的处理自旋关联函数的技术. 本节中所有大写字母都表示嵌入空间中的坐标, 向量指标, 算符... 而小写字母表示的都是真实空间中的版本.

类似的过程可以在张量的场合被重复, 但我们构造一个满足各种性质的高阶张量显然非常繁琐. 我们能不能找一个更方便的方法来处理这一切呢? 这当然是可以的, 我们可以把系统的张量性质通过它们和一些“极化矢量”的内积来提取出来, 而它们和极化矢量的内积是洛伦兹不变的.

在这里, 我们只考虑一些**对称且无迹**的张量, 如果该张量对称, 即它的所有指标地位相同, 我们可以把它点乘上一些极化矢量而不丢失任何信息”

$$f_{a_1 a_2 \dots a_l} \leftrightarrow f(z) = f_{a_1 a_2 \dots a_l} z^{a_1} z^{a_2} \dots z^{a_l} \quad (80)$$

这种方法相当于把一个张量的信息通过一个齐次多项式来表达出来. 而在共形场论中, 一个带自旋的基本张量场还应该无迹的, 我们还可以添加一个额外的要求, 让 $z^2 = 0$.

$$f_{a_1 a_2 \dots a_l} \leftrightarrow f(z) = f_{a_1 a_2 \dots a_l} z^{a_1} z^{a_2} \dots z^{a_l} |_{z^2=0} \quad (81)$$

数学家可以证明, 这样的对应是一一对应的, 我们可以尽管放心采用这样的方式来把张量算符的信息给放进多项式里. 另外, $z^2 = 0$ 意味着我们只关心这一多项式在 $z^2 = 0$ 这一超曲面上的取值, 加上一些正比于 z^2 的成分不会带来任何物理后果.

接下来我们还要研究如何把多项式变回张量的形式, 这很显然最直接的方法就是求导. 我们定义一个求导算符如下:

$$D_a = \left(\frac{d}{2} - 1 + z \cdot \partial \right) \partial_a - \frac{1}{2} z_a \partial^2 \quad (82)$$

注意到, $D_a z^2 = \left(\frac{d}{2} - 1 + z \cdot \partial \right) 2z_a - \frac{d}{2} 2z_a = 0$, 这和前面我们提及的 z^2 项没有物理后果相符.

我们举一个最简单的例子, 对于一个向量 v_a , 它的多项式形式就是 $f(z) = v \cdot z$, 求导得到:

$$\begin{aligned} D_a f(z) &= D_a (v_b z^b) \\ &= \left(\frac{d}{2} - 1 + z \cdot \partial \right) \partial_a - \frac{1}{2} z_a \partial^2 (v_b z^b) \\ &= \left(\frac{d}{2} - 1 \right) v_a \end{aligned} \quad (83)$$

或者一个次简单的例子，一个对称二阶张量 $f_{ab} = \frac{1}{d}v^2\delta_{ab} - v_a v_b$ ，它的多项式形式是 $f(z) = \frac{1}{d}v^2 z^2 - (z \cdot v)^2$

$$\begin{aligned} D_a f(z) &= D_a \left(\frac{1}{d}v^2 z^2 - (z \cdot v)^2 \right) \\ &= \left[\left(\frac{d}{2} - 1 + z \cdot \partial \right) \partial_a - \frac{1}{2}z_a \partial^2 \right] (-(z \cdot v)^2) \\ &= \dots \end{aligned} \quad (84)$$

这部分细致推导我懒得写了，读者自证不难

经过一些类似的数学推导我们能得到一般张量的关系：

$$f_{a_1 a_2 \dots a_l} = \frac{\Gamma(d/2 - 1)}{\Gamma(l + 1)\Gamma(d/2 - 1 + l)} D_{a_1} D_{a_2} \dots D_{a_l} f(z) \quad (85)$$

与此同时，我们也可以在嵌入空间中重复一遍一模一样的事情，即 $O(X, Z)$ ，为了让 Z 仍然满足平方为零和与 X 正交，我们可以取：

$$Z = (0, 2x \cdot z, z) \quad (86)$$

而从 $O(X, Z)$ 恢复到带自旋的 $O_A(X)$ ，我们同样可以写一个一模一样的求导算符：

$$D_A = \left(h - 1 + Z \cdot \frac{\partial}{\partial Z} \right) \frac{\partial}{\partial Z^A} - \frac{1}{2} Z_A \frac{\partial^2}{\partial Z \cdot \partial Z} \quad (87)$$

总而言之，我们通过把算符的自旋信息和一些复的极化矢量做内积，来把其信息编码进一个对称多项式在 $z^2 = 0$ 处的取值。这样的好处有两方面，一方面我们可以方便地计算多点高自旋关联函数，这在下一节会有一个技术性的介绍。

另一方面，自旋为 l 的算符在这里对应了 z 的 l 次齐次多项式，而众所周知，物理学家非常喜欢解析延拓。通过对 l 的解析延拓，让这个函数成为 z 的任意实数，甚至任意复数幂次，我们就可以去研究”复自旋”的算符，这在光线算符的章节会介绍。

5.5 自旋关联函数的计算

在引入了含有 x 和 z 的自旋无关的算符表示方法技术之后，我们就可以逃开手动构造张量结构，而试图找一些一般性方法。

首先因为 $Z^2 = 0, X^2 = 0, Z \cdot X = 0$ 的限制，我们实际上用来造东西的方法并没有多少，我们把 $Z^2, Z \cdot X$ 的这些项视作一些”纯规范”。对于一些张量结构，它只有在 $X_2 = 0$ 的时候是纵向的，而有的张量结构不需要满足 $X^2 = 0$ 的光锥条件自动就是纵向的，例如：

$$W_1 = \eta_{AB} - \frac{X_{1B} X_{2A}}{X_1 \cdot X_2}, \quad W_2 = \eta_{AB} - \frac{X_{1B} X_{2A} + X_{1A} X_{2B}}{X_1 \cdot X_2} \quad (88)$$

其中前者是自动满足纵向条件，而后者只在光锥上满足。但幸运的是，它们只差一些纯规范项。

我们有一套特定的方法来进行构造，如果一个张量在光锥上是纵向的，那么我们只要扔掉所有正比于 X^2, η_{AB}, X_i 的部分，剩下的结果一定是自动满足纵向条件的。

这样看，我们可以证明，只有 Z 出现在这样一种张量结构的时候，能永远保持纵向偏振：

$$C_{AB} = Z_A X_B - Z_B X_A \quad (89)$$

那么用它作为基本单元，我们为了造出一些多项式，还得把这些下标全都缩并掉，对于两点函数，下标只有 1 和 2，我们只有一种缩并方法：

$$H_{12} = -C_1 \cdot C_2 = -2[(Z_1 \cdot Z_2)(x_1 \cdot X_2) - (X_1 \cdot Z_2)(X_2 \cdot Z_1)] \quad (90)$$

(如果考虑 C_1 和 C_2 的迹, 我们发现不会产生新的结构)

因此一个自旋为 l , 量纲为 Δ 的算符的两点函数, 其结果必然是:

$$G(X_1, X_2, Z_1, Z_2) = \frac{H_{12}^l}{(X_{12})^{\Delta+l}} \quad (91)$$

对于三点函数, 我们有更丰富的张量结构, 我们额外多出了一种 C 和量纲先来缩并的方法:

$$V_{i,jk} = \frac{X_j \cdot C_i \cdot X_k}{X_j \cdot X_k} = \frac{(Z_i \cdot X_j)(X_i \cdot X_k) - (Z_i \cdot X_k)(X_i \cdot X_j)}{(X_j \cdot X_k)} \quad (92)$$

显然 V 对 jk 反对称, H 对 ij 对称.

对于三点函数, 我们总共有六种张量结构, 分别是:

$$V_1 = V_{1,23}, V_2 = V_{2,31}, V_3 = V_{3,12}, \quad H_{12}, H_{13}, H_{23} \quad (93)$$

我们也可以证明, 抓一些迹过来也不会产生任何新的张量结构了.

对三点函数. 所以我们六种张量结构有六种指数的自由度, 即:

$$\prod_i^3 V_i^{m_i} \prod_{ij} H_{ij}^{n_{ij}} \quad (94)$$

但三点函数的三个构成算符自旋是给定的, 所有 Z_i 的次数要严格等于 l , 即:

$$m_i + \sum_j n_{ij} = l_i \quad (95)$$

这会提供三个约束方程.

不过好在对于一套完备的通常的共形场论, 一切自旋都是自然数, 这些方程都是自然数意义下的方程, 其结果的总是有限多个的, 我们可以手动或者用一点组合小知识来数过来.

最简单的例子是一个标量-标量-张量的关联函数, 我们有方程:

$$m_1 + n_{12} + n_{13} = 0, \quad m_2 + n_{12} + n_{23} = 0, \quad m_3 + n_{13} + n_{23} = l \quad (96)$$

解只能是只有 $m_3 = l$, 剩下的全是零, 最终得到张量结构和最终的三点函数为:

$$G_{ssl} = \frac{((Z_3 \cdot X_1)(X_2 \cdot X_3) - (Z_3 \cdot X_2)(X_1 \cdot X_3))^l}{X_{12}^{\frac{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 + l}{2} + \dots}} \quad (97)$$

在最后, 我们通过计算, 可以找到一个快速从嵌入形式恢复到物理空间的替换方法:

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot Z_2 &\rightarrow z_1 \cdot z_2 \\ X_1 \cdot X_2 &\rightarrow -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 \\ X_1 \cdot Z_2 &\rightarrow z_2 \cdot (x_1 - x_2) \\ X_2 \cdot Z_1 &\rightarrow -z_1 \cdot (x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (98)$$

5.6 守恒流的关联函数

这部分主要是一些算符如果是守恒流, 那么守恒条件对关联函数的约束情况.

5.7 动量空间

这部分是在动量空间中欧氏和闵氏关联函数的结构. 主要技术来自于 [1] 的内容.

6 闵氏共形场论

这节主要介绍将欧氏共形场论的结论解析延拓到闵氏的相关技术, 其主要参考来自 [8].⁹

6.1 量子力学的例子

在这部分, 我们不妨忽略所有空间自由度, 只关注一个 0+1 维的欧氏/闵氏量子力学. 系统存在一个厄米的哈密顿量 H , 真空态是哈密顿量的零本征态, 而且其它所有状态的能量都是正的. 在量子力学中, 所有算符和关联函数都只依赖时间作为自变量.

在欧氏时空中, 时间演化算符维 $U = e^{-\tau H}$, 因此有:

$$\mathcal{O}_E(\tau) = e^{\tau H} \mathcal{O}_E(0) e^{-\tau H} \quad (99)$$

这样, 随便一串算符的真空期待值就可以写成:

$$\begin{aligned} & \langle \Omega | O_1(\tau_1) \dots O_n(\tau_n) | \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega | O_1(0) e^{-(\tau_1 - \tau_2)H} O_2(0) \dots O_{n-1}(0) e^{-(\tau_{n-1} - \tau_n)H} O_n(0) | \Omega \rangle \\ &= \sum_{\psi_i} \langle \Omega | O_1(0) | \psi_1 \rangle \langle \psi_1 | O_2(0) | \psi_2 \rangle \dots \langle \psi_{n-1} | O_n(0) | \Omega \rangle e^{-(\tau_1 - \tau_2)E_1} \dots \end{aligned} \quad (100)$$

其中我们插入了一些能量本征态 ψ_i 来方便计算.

我们发现一个重要事实:

在欧氏时空的量子理论中, 只有编时的关联函数才是良定义的

这件事其实很简单, 一旦编时, 那么每一个 $e^{-\tau H}$ 在高能量下的行为永远都是被指数压低的, 因而即使涉及到插入一些高能态, 因为一般来说, 局域算符总不会出现一些指数增长的概率, 它们的贡献也不会让关联函数炸掉. 与此同时, 欧氏路径积分也能自然地得到这一切的编时关联函数.

在这之后, 我们要把欧氏空间的一切延拓到闵氏空间, 这件事被 O-S Reconstruction 定理所保证, 具体的操作是, 我们考虑复化的欧氏时间: $\tau = \epsilon + it$, 而一旦 ϵ 是严格编时排序的, 那么在复平面上, 关联函数 $F(\tau_1, \dots, \tau_n)$ 就能被延拓到一个复平面上的全纯函数.

这个论证非常简单, 因为实部的编时依然会保证高能态被指数压低, 而虚部带来的相位因子不会带来任何问题.

但在**闵氏时空**之中, 我们的时间演化算符是 e^{-itH} , 这对实的 t 不会带来任何发散, 也因此在前面欧氏时空的事实不再成立, 在闵氏时空中, 多种多样的**非编时关联函数**也可能是良定义的, 因此它有丰富得多的解析结构.

6.2 一些很数学的东西

我们不得不注意到一个事实, 对于一般的 Wightman 函数, $\langle \Omega | O(t_1) \dots O(t_n) | \Omega \rangle$, 这个东西拿给数学家看他们会为之抓狂, **因为这个东西根本不是函数**. 为了让这一切在能量状态的求和收敛, 我们可以把时间在一定程度上“涂开”, 即考虑这样的函数:

$$\int dt_1 \dots dt_n f_1(t_1) \dots f_n(t_n) \langle \Omega | O(t_1) \dots O(t_n) | \Omega \rangle \quad (101)$$

其中这里的 $f_i(t_i)$ 足够光滑, 来让快速振荡的部分会在积分中被抹平, 来保证这个最终结果是收敛的. 这在数学家的语言中, Wightman 函数是一个“**缓增广义函数**”(tempered distribution). 我们在下面给出数学的严格定义:

⁹这个讲义还没有在 arxiv 上被公布, 但它作者的[个人网站](#)上有资源.

对于给定的一个函数空间 \mathcal{F} , 一个广义函数 T 是一个连续的线性泛函, 使得:

$$T : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C} \quad (102)$$

其中连续指的是这个映射不会破坏函数空间中序列的收敛性.

我们在形式上把 T 写成一个积分的形式 (尽管数学家认为 $T(t)$ 根本没有良定义所以写下这个积分式完全就是无稽之谈)

$$T(f) = \int dt f(t) T(t) \in \mathbb{C} \quad (103)$$

这种广义函数最著名的例子就是狄拉克 δ 函数, $T(t) = \delta(t)$, 它只在积分中出现才是有良定义的, 这个映射被具体实现为:

$$\int dt f(t) \delta(t) = f(0) \quad (104)$$

在我们量子场论中, 我们取这个函数空间为 Schwartz 空间 \mathcal{S} , 说人话就是一个快速衰减的函数空间, 它有如下性质:

$$t^m \partial^n f(t) \quad (105)$$

无论如何对应任意的 $m, n \in \mathbb{Z}_+$, 这个函数都是有界的. 即它进行任意次求导后, 它衰减地都仍然要强于所有的幂函数. 在这上面的广义函数就是我们想要的”缓增广义函数”

那问题来了, 我们为什么就能认为 Wightman 函数就是上面提及的”缓增广义函数”呢? 在前面提到了, 我们可以把编时的欧氏关联函数进行解析延拓:

$$\tau_i = \epsilon_i + it_i, \quad (\epsilon_1 > \dots \epsilon_n) \quad (106)$$

如果我们取定这些时间 t , 并让这些 ϵ 以一种不失有序的方式趋于零, 这样我们就能从这个全纯函数的边界值上得到 Wightman 函数.

$$\lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} F(\epsilon_i + it_i) = ? \langle \Omega | O_1(t_1) \dots O_n(t_n) | \Omega \rangle \quad (107)$$

但问题在于这个趋向边界的过程事实上是病态的, 它可能会有一些发散性, 这就是为什么我们说 wightman 函数是”缓增广义函数”而不是真正的函数.

我们假定在边界附近, $F(\tau)$ 即使发散, 它的发散行为也最多是幂律发散¹⁰. 因此可以给它的发散行为安一个上界:

$$|F(\tau = \epsilon + it)| \leq \epsilon^{-k} P(t) \quad (108)$$

然后考虑 $F(\epsilon + it)$ 对一个测试函数 $f(t)$ 的积分:

$$a(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} dt F(\epsilon + it) f(t) \quad (109)$$

但因为这个测试函数是一个缓增函数, 即它和它的导数的收敛性都好于幂律, 因此如果我们对 ϵ 求任意阶导, 其结果我们可以放心地分部积分:

$$\partial_\epsilon^n a = \int dt (-i\partial_t)^n F(\epsilon + it) f(t) = \int dt F(\epsilon + it) (i\partial_t)^n f(t) \leq \frac{C_n}{\epsilon^k} \quad (110)$$

这个积分的结果的发散程度不会更严重, 而一旦我们再回去对 ϵ 积分, 这个发散会被削弱, 只要我们一开始的”任意阶导数”里面的 n 足够大, 积分 n 次后, ϵ^k 的发散就会被全部杀死, 这样我们就证明了 $a(\epsilon)$ 的极限是有限的. 即 Wightman 函数确实是一个缓增广义函数, 它会被这样的缓增函数给抹平.

还有一点额外的补充, 在欧氏关联函数中, 我们没办法去模仿 Wightman 函数来”抹平”振荡贡献, 因为在抹平的过程中, 一些非编时的区域会被混进来, 而这对欧氏关联函数是致命的. 这可能会让一些算符展开的收敛范围出现问题. 而且, 欧氏关联函数有时关于时间是不可积的, 这在微扰论计算中会出现问题.

¹⁰在共形场论中我们不难发现绝大多数行为都是幂律的, 幂次为算符的量纲

而另一边, 因为 Wightman 函数本身没有对时间 t 的顺序限制, 这个抹平操作是当然合法的, 而且得益于这个性质, 把一切进行傅里叶变换的结果也会是一个缓增广义函数. 而闵氏时空的编时关联函数从某些角度上看和欧氏关联函数更类似, 它们都没办法抹平. 但在光锥奇点附近, 编时关联函数会有一些类似的行为.

6.3 延拓的实际方法

我们接下来把这一切推广的有空间方向的量子场论, 并采用 $(-, +, +, +)$ 度规, 定义某处的算符为:

$$O(x) = e^{-iPx} O(0) e^{iPx} \quad (111)$$

我们规定哈密顿量为平移生成元的零分量 $H = P^0$, 而时间作为一个坐标 $t = x^0$.

我们仿照上面的做法, 可以发现如果空间坐标的虚部是严格有序的, 那么最终 wightman 函数的结果也会被指数压低, 那么我们模仿前文的延拓方法:

1. 从一些实的, $t_i = 0$ 的位置 x_i 出发
2. 给他们一些小的虚部 $x_i \rightarrow x_i + i\zeta_i$, 并且相邻两点的虚部间距应该是编时的. 或者我们直接让 $x_i^0 = -i\epsilon_i$, 而 ϵ_i 严格编时.
3. 接下来开心地调整一切坐标的实部, 因为关联函数在这个区域内是全纯的, 一切都很安全.
4. 最后把这些虚部有序地趋于零, 得到的结果作为一个缓增广义函数就是 Wightman 函数

这套操作的步骤其实就是在跟随 O-S Reconstruction Theorem[5] 的步骤, 这套操作能让欧氏量子场论的关联函数 (即找一套共同的编时小虚部) 解析延拓到一些作为缓增广义函数的 Wightman 函数上去.

让我们以一个两点函数的解析延拓为例, 在欧氏时空中, 一对基本场两点函数是:

$$\langle O_E(\tau_2, x_2) O_E(\tau_1, x_1) \rangle = \frac{1}{(\tau_{21}^2 + x_{21}^2) \Delta} \quad (112)$$

进行解析延拓, 假定 $\tau_2 = \epsilon_2 + it_2$, $\tau_1 = \epsilon_1 + it_2$ ($\epsilon_2 > \epsilon_1$), 那么有:

$$\langle O_E(\epsilon_2 + it_2, x_2) O_E(\epsilon_1 + it_1, x_1) \rangle = \frac{1}{(-t_{21}^2 + x_{21}^2 + 2i\epsilon_{21}t_{21} + \epsilon_{21}^2) \Delta} \quad (113)$$

取 $\epsilon_{21} \rightarrow 0^+$ 的极限:

$$\langle O(t_2, x_2) O(t_1, x_1) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x_{L21}^2 + i\epsilon t_{21}} \Delta \quad (114)$$

我们也可以把这一切反过来得到:

$$\langle O(t_1, x_1) O(t_2, x_2) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x_{L12}^2 + i\epsilon t_{12}} \Delta \quad (115)$$

另外值得一提的是, 这个结果对类时间隔和类空间隔会存在相因子的不同, 比如我们以第一个式子为例:

$$\langle O(t_2, x_2) O(t_1, x_1) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x_{L21}^2 + i\epsilon t_{21}} \Delta \quad (116)$$

如果 x_2 在 x_1 的未来方向, 这个结果就会变成:

$$\begin{aligned} \epsilon \rightarrow 0 \frac{1}{x_{L21}^2 + i\epsilon t_{21}} \Delta &= \epsilon \rightarrow 0 \frac{1}{-t_{21}^2 + i\epsilon t_{21}} \Delta \\ &= \frac{1}{|x_2 - x_1|^{2\Delta}} e^{-i\pi\delta} \end{aligned} \quad (117)$$

如果在过去方向, 这个相位会多一个负号 (相当于从 π 跨越到了 $-\pi$ 附近), 而在类空情况, 这个相位会变成零 (因为分母的相位只剩下了无穷小量).

这显然能导出著名的对易子关系——类空间隔的两个算符对易子为零. 这满足了因果性的需求.

6.4 么正性边界

我们用闵氏动量空间的关联函数, 可以找到一个光速证明么正性边界的方法, 我们以 $J = 0$ 的场合举例:

对一个由基本场产生的状态, 我们写作:

$$|\psi_f\rangle = \int d^d x f(x) O(x) |\Omega\rangle \quad (118)$$

那么它的模方显然是:

$$\langle\psi_f|\psi_f\rangle = \int d^d x_1 d^d x_2 f^*(x_2) f(x_1) \frac{1}{(x_1^2 + i\epsilon t_{12})^\Delta} \quad (119)$$

然后我们把一切走一个傅里叶变换:

$$\sim \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} |\tilde{f}(p)|^2 \tilde{K}(p) \quad (120)$$

所以我们只要求出动量空间的闵氏两点函数, 就能得到这个态的模方. 我们不难发现, 要求模方正定等价于要求这个动量空间两点函数正定, 我们接下来进行傅里叶变换, 并取静止参考系, 即 $p = (p^0, 0)$, 因为洛伦兹对称性, 我们最终结果只有 p^2 依赖

开始算:

$$\begin{aligned} & \int d^d x \frac{e^{ip^0 t}}{(-t^2 + x^2 + i\epsilon t)^\Delta} \\ &= \text{volS}_{D-2} \int \frac{r^{d-2} e^{iEt} dr dt}{(-t^2 + r^2 + i\epsilon t)^\Delta} \\ &= \frac{2^{d-2\Delta} 2\pi^{\frac{d+2}{2}}}{\Gamma(\Delta)\Gamma(\Delta - \frac{d-2}{2})} (-p^2)^{\Delta - \frac{d}{2}} \theta(p) \end{aligned} \quad (121)$$

看下面 Γ 函数的参数, 我们就得到了这个正定性边界.

对有自旋的算符, 我们同样可以进行类似的操作.

这里是一些计算过程

7 影子变换和光变换

7.1 背景

在本节中, 我们着重研究闵氏时空共形场论的一些可观测量. 和欧氏时空相比, 闵氏时空存在一个特殊的“光锥”, 所以我们可以光锥上选取一条光线, 在针对光线做积分. 我们选定一个方向作为光锥方向, 以此定义光锥坐标 ($u = x^0 - x^1, v = x^0 + x^1, \vec{y} \in \mathbb{R}^{d-2}$) 即:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv \mathcal{O}_{v\dots v}(u = 0, v, \vec{y}) \quad (122)$$

这样的算符在对撞机物理中有应用, 即著名的“Energy Flux”:

$$\mathcal{E}(n) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{d-2} \int_0^\infty dt n^i T_i^0(t, r\vec{n}) \quad (123)$$

这个物理量很显然, 就是能流在某个方向上的通量随时间的累积, 对应实际对撞机上某个方向的探测器探测到的总能量.

7.2 更深入的嵌入形式

在这部分我们更深入地处理嵌入形式，一些专门的讨论可以看[这篇讲义](#)，它介绍得非常清楚。

我们先把前面提到的嵌入形式也延拓到闵氏时空，这一切非常简单，只需要把其最后欧氏部分改成闵氏部分就行了。度规就是：

$$X_L^2 = -X_L^+ X_L^- - (X_L^0)^2 + \sum (X_L^i)^2 \quad (124)$$

而根据先前的约定，我们把庞加莱截面仍然取为：

$$X_L = (1, x_L^2, x_L^\mu) \quad (125)$$

而闵氏共形群对时空点的变换就被转化为这里 $SO(d, 2)$ 群的作用，其变换和算符的具体形式在这里不多赘述。

一个很有趣的一点是，因为光锥的截面现在具有了洛伦兹的结构，存在一种解析延拓。

为了更好地理解我们研究的空间的拓扑，我们可以换一组参数化的方式，先考虑欧氏共形场论，对应的空间是 $\mathbb{R}^{d+1,1}$ ，其度规为：

$$X^2 = -X^+ X^- + \sum (X^i)^2 + (X^0)^2 \quad (126)$$

其中我们挑出 X^0 是因为我们将要选取它作为时间，而同时，我们将会选择第 d 个坐标来参与进光锥方向。之后，我们考虑光锥和规范不变性，我们可以选择另外一个标架如下：

$$X_E = (\cosh \eta + n^d, \cosh \eta - n^d, \sinh \eta, n^i), \quad (\eta \in \mathbb{R}, \vec{n} \in S^{d-1}) \quad (127)$$

不难验证，这些点确实满足在光锥上。采用这个的好处是，如果我们在 d 个坐标和嵌入空间的”时间”坐标之间进行洛伦兹 Boost，即这个操作在前面提及了，是伸缩变换，它对应的恰好是 η 的无穷小平移。

另外，我们发现这个曲面的诱导度规是：

$$dX_E \cdot dX_E = d\eta^2 + d\Omega_{d-1}^2 \quad (128)$$

这恰好是欧氏柱面上的度规 $\mathbb{R} \times S^{d-1}$ 的度规，我们称之为欧几里得圆柱。不难验证它和平直度规之间确实只差一个 Weyl 的 Rescale，可以通过一些 SCT 变换所达到。而 $\eta = \pm\infty$ 的位置对应了 $x^0 = \pm 1$ 的点。¹¹通过这些数学技巧，我们会发现 η 就正好对应了径向量子化里面的径向坐标。

在这之后，我们把它解析延拓到闵氏共形场论，我们相当于直接进行一个 $\eta = i\sigma$ 的延拓，这样这个曲面的度规在一个 rescale 的意义下也共形于平直的闵氏度规，可以通过一些 SCT 变换来变回闵氏平直度规。

$$(X^+, X^-, X^0, X^i) = (\cos \sigma + n^i, \cos \sigma - n^i, \sin \sigma, n^i) \quad (129)$$

这参数化了 $\mathbb{R}^{d,2}$ 中的一个 $S^1 \times S^{d-1}$ ¹² 的区域，它作为对投影光锥的另一个规范选取，其诱导度规是一个关于 σ 的闵氏度规：

$$ds^2 = -d\sigma^2 + d\Omega_{d-1}^2 \quad (130)$$

这个参数化的好处是对于伸缩变换，它的 Killing 矢量同样会被变成 σ 方向的平移变换。但最大的问题出现了，我们做完解析延拓之后，三角函数它有了周期性！

这个空间有洛伦兹群的自然作用，可以在上面写下各种关联函数，但有一个问题，它不太适合作为一个量子场论的时空，因为它在 σ 方向上被紧致化了，这个方向是类时的，所有还有闭合类时线。这两件事都不是我们想在量子场论中出现的。

解决的方法是放宽限制，寻找其一个万有覆叠（就像复变函数中取不同的黎曼面分支一样），把 σ 放宽到 \mathbb{R} 上，即不再要求 $\sigma \sim \sigma + 2\pi$ 的等价性。这得到了一个诱导度规是闵氏的子流形 $\tilde{\mathcal{M}}_d = \mathbb{R} \times S^{d-1}$ ，这才是我们所希望的几何，这被我们称作洛伦兹圆柱。

¹¹这本质上其实是 NS 量子化的方案，它可以在 Rychkov 的讲义里面找到。

¹²如果商掉的是全体实数倍数的伸缩而非正实数伸缩，严格来说还会差一个 \mathbb{Z}_2

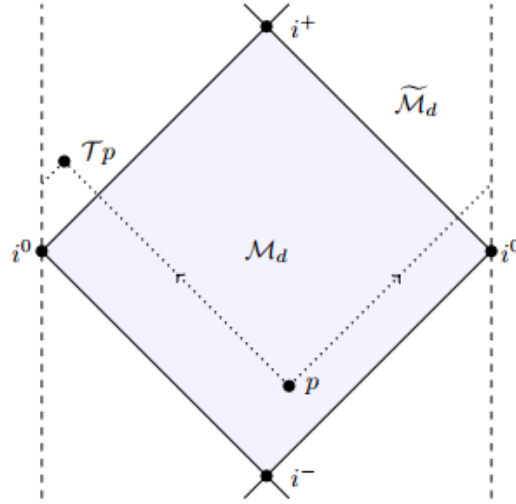


图 6: 一个庞加莱块是蓝色区域, 但在它外面还有许多不同的来自延拓的区域, 两侧的竖线被粘了起来, 事实上它们一切都住在一个圆柱上, 这些线也是圆柱面上的线.

我们存在这样一个定理:

么正 CFT 的关联函数可以被解析延拓到洛伦兹圆柱上的 Wightman 函数.

我们很显然能找到庞加莱截面和洛伦兹圆柱坐标的关系:

$$(1, x_L^2, x_L^0, x_L^i) = \left(1, \frac{\cos \sigma - n^d}{\cos \sigma + n^d}, \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma + n^d}, \frac{n^i}{\cos \sigma + n^d} \right) \quad (131)$$

稍微解一下可以发现, 通常的洛伦兹空间 $x_L \in \mathbb{R}^{d-1,1}$ 会覆盖 $\cos \sigma + n^d > 0, -\pi < \sigma < \pi$ 的几何区域, 而 $\sigma = 0, \vec{n} = (0, 0, 0, \dots, -1)$ 对应的是空间无穷远点.¹³

而通过嵌入形式的操作我们不难得到, 在原始空间和洛伦兹圆柱上的关联函数之间只差一个分母上的因子:

$$\langle \Omega | O_1(x_1) \dots O_n(x_n) | \Omega \rangle = \prod_i (\cos \sigma_i + n_i^d)^{\Delta_i} \langle \Omega | O_1(\sigma_1, n_1) \dots O_n(\sigma_n, n_n) | \Omega \rangle_{\tilde{M}} \quad (132)$$

在把 σ 的周期性放开后, 我们的对称群也变成了原本 $SO(d, 2)$ 的万有覆盖 $\tilde{SO}(d, 2)$ 了. 这会带来一些微妙的不同, 例如原来的转动生成元 $M_{-1,0}$ 生成了一个小平移, 而且具有周期性, 但在其覆盖中就没有这个令人束手束脚的周期性了.

当我们考虑这样完整的洛伦兹柱面时, 因为 σ 被扩展到任意实数取值, 如果我们随着时间的流逝, 走过类时的无穷远, 对应 σ 的不断增长, 当 σ 越过传统的 $-\pi, \pi$ 的区域后, 这就带我们跑到了另一片的洛伦兹时空的过去无穷远. 我们把它称作另一个”闵氏时空块”. 画成图就是这样:

我们存在一种在不同的庞加莱块之间跳来跳去的离散对称性, 我们考虑如果有一个点 $p = \sigma, \vec{n}$, 它向所有未来方向发出光线, 那么在圆柱上绕了一圈之后, 它们必然会在点 $Tp = (\sigma + \pi, -\vec{n})$ 的位置收到它. 这两点在紧化之后的意义下是相同的, 这对应的是一个嵌入空间下的反演变换.

另外还需要说明一点, 我们可以用不同庞加莱块之间的关系来描述时间之间的因果性. 如果两个点的间隔是类空的, 那么一个点一定会在第二个点前后两个庞加莱块之间 (在前面的过去光锥和后面的未来光锥)

¹³类光无穷远可以通过解方程来得到其轨迹.

7.3 李代数的 Weyl 群

李代数的受限 Weyl 群是指在不同的表示之间, 且保持其卡西米尔不变的所有变换组成的群.

这部分是一些数学背景, 来让读者回忆起李代数课程的内容

7.4 ”影子”变换 (Shadow Transform)

这部分是对文章 [7] 内容的总结. 主要涉及欧氏共形场论中的 Shadow Transform.

7.5 光变换

我们回忆一下嵌入形式的结果, 对于一个量纲为 Δ , 自旋为 J 的算符, 它在嵌入空间中可以用 X 和一些极化矢量 Z 来描述, 它必然是 X 的 $-\Delta$ 次齐次函数和 Z 的 J 次齐次函数, 用这种定义, 我们把自旋可以推广到任意复数.

相对独立地, 我们来回到物理空间里面对一个算符的积分. 它可以理解为一种积分变换如下:

$$\mathbf{L}[\mathcal{O}] = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \mathcal{O}(Z - \alpha X, -X) \quad (133)$$

首先我们注意到, 在这个变量带换下, 两个自变量本身仍然保持在光锥上, 而原本 Z 的规范冗余现在被理解成了积分变量 α 的平移. 另外, 如果我们考虑这个积分的路径, 相当于从 X 点沿着光线积分到了另一个庞加莱块上的 $-X$.

之后我们不难验证, 这个结果他是 X 的 $-(1-J)$ 次齐次函数和 Z 的 $1-\Delta$ 次齐次函数, 从这个角度看, 这个积分变换的结果表现起来就行另一个基本场, 但它有着 $1-J$ 的量纲和 $1-\Delta$ 的自旋.

这个变换是共形不变的吗? 答案是是的, 因为他保证了共形群的卡西米尔保持不变, 这样的变换在表示论中叫做“仿射外尔反射/受限外尔变换”, 它指的是一种在群的不同表示之间的变换.

$$C_2 = \Delta(\Delta - d) + J(J + d - 2), \quad C_4 = (\Delta - 1)(d - \Delta - 1)J(2 - d - J) \quad (134)$$

用群论的语言来说, 实际上闵氏共形群一共有好几种类似的变换, 这些变换构成了一个 D_8 群. 而在欧氏共形群中, 只有一种变换, 即上一部分影子变换.

我们把这个光变换给翻译到闵氏坐标下面:

$$\begin{aligned} L[\mathcal{O}] &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \mathcal{O}(Z - \alpha X, -X) \Big|_{X=(1, x^2, x), Z=(0, 2x \cdot z, z)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha (-\alpha)^{-\Delta-J} \mathcal{O}\left(X - \frac{Z}{\alpha} m Z\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha (-\alpha)^{-(\Delta+J)} \mathcal{O}\left(x - \frac{z}{\alpha}, z\right) \end{aligned} \quad (135)$$

这其中在 $\alpha = 0$ 处的奇异行为应该解释为跑到了下一个庞加莱块上去.

另外, 为了让这个积分收敛, 应该有 $\Delta + J > 1$.

最后, 如果我们取

$$\begin{aligned} X_0 &= -(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \vec{0}) \\ Z_0 &= (1, \vec{y}^2, 0, 0\vec{y}) \end{aligned} \quad (136)$$

那么算符的光变换在这一点上的取值就对应了我们一开始提到的积分.

对于 Energy Flux, 显然它应该是一个量纲为 -1 , 自旋为 $1-d$ 的基本算符, 其位置在类光的过去无穷远.

7.6 关联函数的光变换

对于一些光变换后的算符, 我们就需要计算它的关联函数. 我们首先有这样一个好性质:

一切满足 $\Delta + J > 1$ 的局域算符的光变换都会湮灭真空

其证明是简单的, 我们考虑它和任意一串局域算符的 Wightman 函数, 写成一个复函数积分的形式, 因为 Wightman 函数的全纯性, 只要 $\Delta + J > 1$, 它在无穷远的积分就是安全的, 我们选一个无穷远的大半圆围道绕一圈, 因为里面没有极点, 其结果就会是零.

这个性质非常由于, 得益于光变换湮灭真空, 如果我们考虑一个三点函数:

$$\langle \Omega | O_1 L[O_3] O_2 | \Omega \rangle = \Omega | [O_1, L[O_3]] O_2 | \Omega \rangle \quad (137)$$

但对于闵氏量子场论, 这些对易子在类空间隔的场合必然消失, 这样我们只用考虑类时间隔的贡献. 反映到围道积分里面, 就是只有在这些间隔为类时的时候才会有一些在上半平面的极点, 而在类光的情况极点会爬在坐标轴上.

当然, 因为这些算符的三点函数的运动学形式都被共形对称性所固定了, 我们也可以从三点函数的角度来看光变换.

这里有一些手动计算光变换的过程.

最终通过精细的计算我们发现, 光变换得到的算符确实可以当做一个改变了自旋和量纲的算符, 其三点函数的行为是相同的, 和前面相比最多差一个常数.

而如果我们考虑编时关联函数...

8 光线算符

这部分的内容可以参考文章 [4] 的后半内容, 因为参考 [8] 写得实在是不像人话.

9 共形 Regge 理论

10 光线算符与 ANEC

11 高维共形反常

参考文献

- [1] Teresa Bautista and Hadi Godazgar. Lorentzian cft 3-point functions in momentum space. *Journal of High Energy Physics*, 2020(1), January 2020.
- [2] Miguel S. Costa, João Penedones, David Poland, and Slava Rychkov. Spinning conformal correlators. *Journal of High Energy Physics*, 2011(11), November 2011.
- [3] Anatoly Dymarsky, Kara Farnsworth, Zohar Komargodski, Markus A. Luty, and Valentina Prilepina. Scale invariance, conformality, and generalized free fields, 2014.
- [4] Petr Kravchuk and David Simmons-Duffin. Light-ray operators in conformal field theory. *JHEP*, 11:102, 2018.

- [5] Konrad Osterwalder. Euclidean green' s functions and wightman distributions. 1973.
- [6] Konrad Osterwalder and Robert Schrader. Axioms for euclidean green's functions. *Communications in Mathematical Physics*, 31(2):83–112, Jun 1973.
- [7] David Simmons-Duffin. Projectors, Shadows, and Conformal Blocks. *JHEP*, 04:146, 2014.
- [8] David Simmons-Duffin. Tasi lectures on conformal field theory in lorentzian signature. 2019.
- [9] R. F. Streater and A. S. Wightman. *PCT, spin and statistics, and all that*. 1989.